

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ГОРОБЦОВ А.С.

РЫЖОВ Е.Н.

ВОЛГОГРАД 2021

Учебное пособие предназначено для магистров, обучающихся по программам магистратуры по профилю «искусственный интеллект» по направлениям 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.04.03 «Прикладная информатика», 09.04.02 "Информационные системы и технологии".

Учебное пособие выполнено в рамках реализации гранта на разработку программ бакалавриата и программ магистратуры по профилю «Искусственный интеллект», а также на повышение квалификации педагогических работников образовательных организаций высшего образования в сфере искусственного интеллекта (конкурс 2021-ИИ-01 от 10.06.2021).

1. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть $x(t)$ – непрерывная функция времени, определенная на интервале $t \in [0, +\infty)$. Ограниченная последовательность

$$y(t) = \{x(t_i)\}_{i=1,2,\dots,N}$$

называется **временным рядом** длины N . При этом, если $t_i = hi$, где h – шаг дискретизации, то временной ряд называется рядом с постоянным шагом дискретизации. Достаточно часто вместо шага употребляют термин частота дискретизации f , измеряемая в герцах: $f = \frac{1}{h}$.

Временной ряд длины N может быть записан через некоторую обобщенную функцию δ в виде:

$$y(t) = x(t)\delta(t - t_i), \quad (1.1)$$

где

$$\delta(t - t_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } t = t_i, \\ 0, & \text{при } t \neq t_i. \end{cases}$$

Ряд (1.1) является одномерным рядом. Введение нескольких функций $x_j(t)$ $y_j(t) = x_{ji}(t_i)$, $j = 1, 2, \dots, k$, в частности, позволяет строить многомерные ряды, k – число подрядов в многомерном ряде. Важным свойством многомерного ряда является синхронность его подрядов, т.е. значения многомерной функции берутся в одинаковые моменты времени. Временными рядами представляются большинство данных, получаемых с помощью измерительных приборов – данные различных датчиков, аудио и видеопотоки и др.

Следует отметить, что временные ряды являются формой представления случайных процессов. В этом случае временные ряды называются реализациями, т.е. представляют собой некоторую реализацию случайного процесса. Все получаемые с помощью измерительных приборов временные ряды

можно считать случайными процессами, поскольку они содержат в себе случайную ошибку измерений.

1.1 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Главной статистической характеристикой временного ряда (непрерывного и дискретного), как любой случайной величины, является функция плотности распределения вероятности $p(x)$ []. Через эту функцию определяются так называемые статистические моменты случайной величины различных порядков.

Статистический момент первого порядка называется математическим ожиданием и для непрерывного ряда (функции) записывается:

$$M(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dt.$$

Здесь предполагается, что $y = x(t)$.

Математическое ожидание для дискретного ряда:

$$M(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Статистический момент второго порядка называется дисперсией:

$$D(y) = \sigma^2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 p(x) dt$$

Дисперсия в дискретной форме:

$$D(y) = \sigma^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - M(x))^2,$$

где $\sigma(y) = \sqrt{D(y)}$ среднеквадратичное отклонение.

Статистический момент третьего порядка характеризует симметрию распределения:

$$\mu_3(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^3 p(x) dt.$$

Величина

$$\mu_3/\sigma^3$$

называется коэффициентом асимметрии.

Статистический момент четвертого порядка показывает насколько существенно распределение по краям:

$$\mu_4(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^4 p(x) dt.$$

Величина

$$\mu_4/\sigma^4 - 3$$

называется коэффициентом эксцесса. Статистические моменты третьего и четвертого порядков используются, например, для определения типов случайных процессов с помощью нейронных сетей.

Для дискретных временных рядов вводится понятие гистограммы распределения, как аналога непрерывной плотности распределения вероятности. Значение гистограммы определяется формулой:

$$p_i = \frac{K_i}{N},$$

$i = 1, 2, \dots, m$, m – число интервалов гистограммы, K_i – число точек временного ряда, удовлетворяющих условиям:

$$x_i \in [x_n, x_n + \delta), \quad \delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m - 1}; \quad x_n =$$

$$x_{\min} + \delta(n - 1), \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

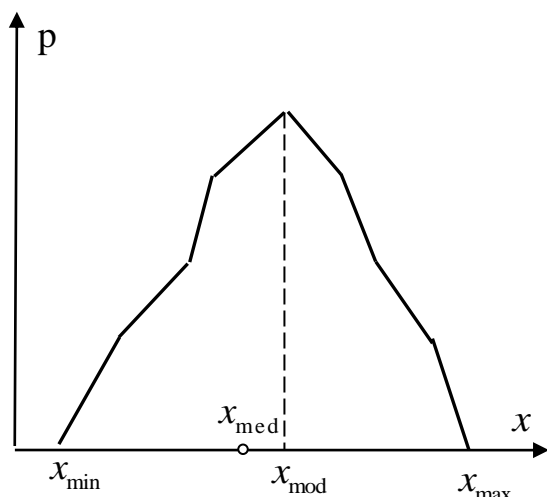


Рисунок 1. Пример гистограммы распределения дискретного ряда

Пример гистограммы приведен на рис.1. Здесь абсцисса x_{mod} пика гистограммы называется модой гисто-

граммы, x_{med} — медианой распределения, определяемая из усло-

$$\text{вия: } \int_{x_{\min}}^{x_{\text{med}}} p(x) dt = \int_{x_{\text{med}}}^{x_{\max}} p(x) dt.$$

В частности, для симметричных распределений $x_{\text{med}} = M(x)$.

Важной характеристикой временного ряда является автокорреляционная функция. Автокорреляционная функция ряда в непрерывной форме:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)\rho(x,\tau)dt$$

Автокорреляционная функция ряда в дискретной форме:

$$R_{yy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - M(x))(x_{i+l} - M(x)), \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

Значение автокорреляционной функции в нуле:

$$R_{yy}(0) = D(y) = \sigma^2(y)$$

Нормированная автокорреляционная функция,

$$R_{yy}^*(\tau) = \frac{1}{D(y)} R_{yy}(\tau).$$

$R_{yy}^*(\tau) \in [0, 1]$. В частности, $R_{yy}^*(0) = 1$. Примеры автокорреляционной функции показаны на рисунке 2.

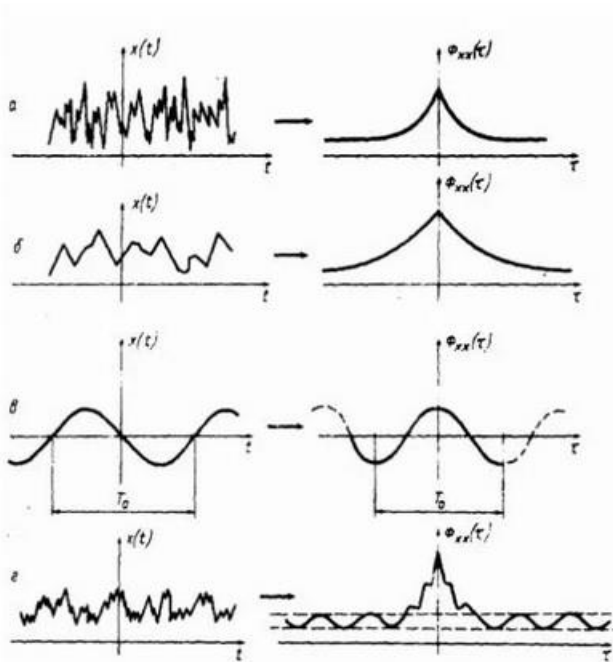


Рисунок 2. Примеры автокорреляционных функций, а – случайный процесс со слабой корреляцией, б – случайный процесс с высокой корреляцией, в – периодический процесс, г – периодический процесс со случайной составляющей..

1.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Статистическими характеристиками многомерных процессов, в частности, являются совместная плотность распределения процессов, взаимная корреляционная функция рассматриваемых процессов.

Совместная плотность распределения вероятности двумерного непрерывного временного ряда обозначается $p(x, y)$. На рисунке 3, в качестве примера, показано графическое представление плотности распределения вероятности двумерного нормального процесса.

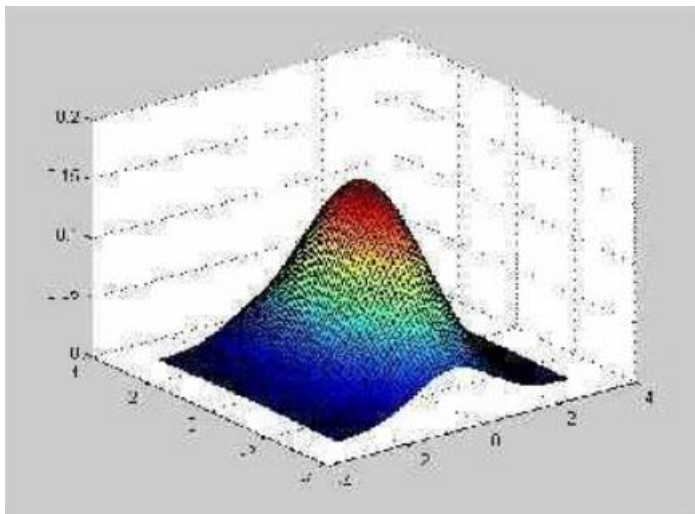


Рисунок 3. Пример плотности распределения непрерывного двумерного нормального процесса.

Совместная плотность распределения, для дискретных временных рядов, аналогично одномерному, определяется выражением:

$$p_{ij} = \frac{K_{ij}}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

На рисунке 4 показан пример плотности распределения дискретного двумерного ряда – двумерной гистограммы распределения.

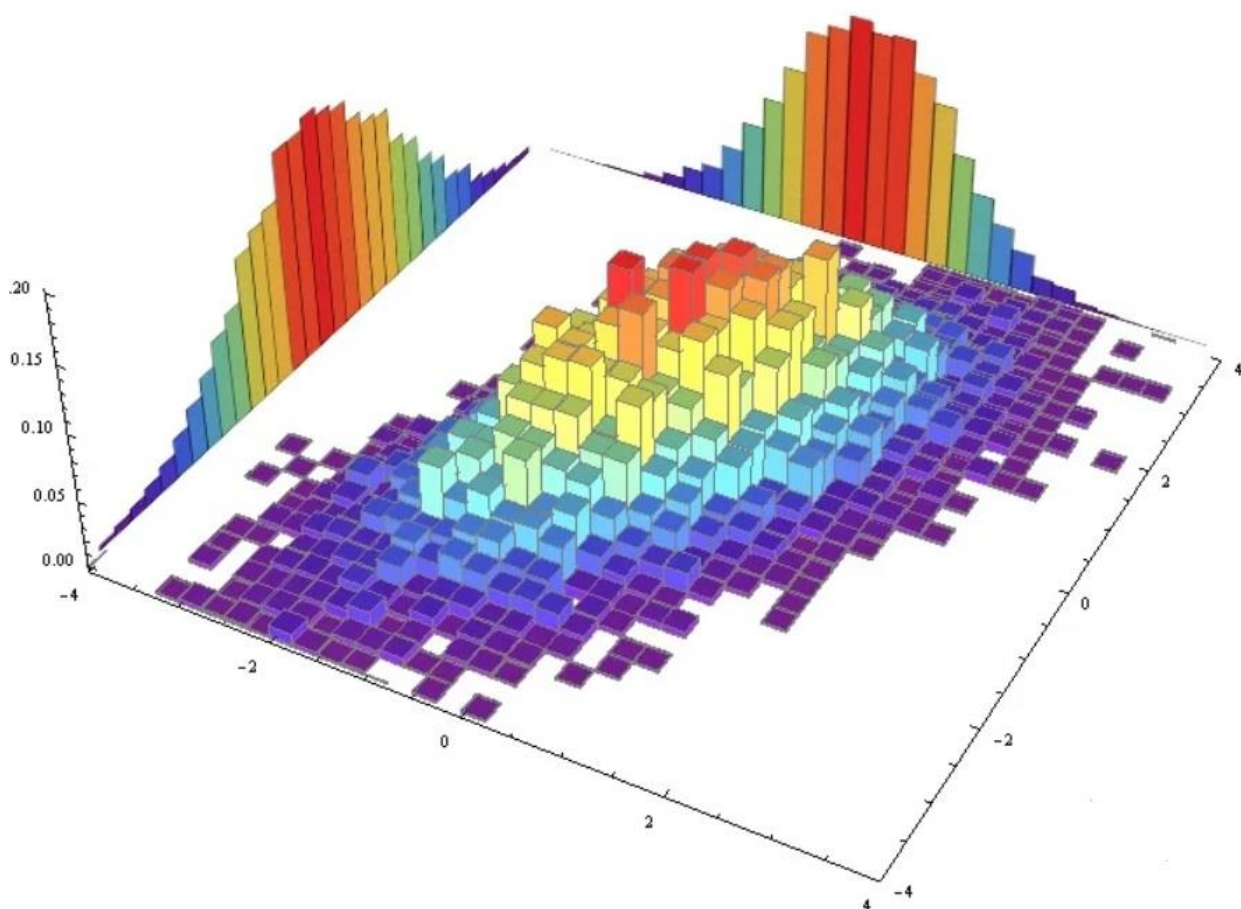


Рисунок 4. Пример графического представления двумерной гистограммы распределения.

Для двухмерного процесса, определяемого функциями $x(t)$ и $y(t)$, взаимные корреляционные функции имеют следующие формы представления - непрерывная форма:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)p(x,y)dt, \quad R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau),$$

дискретная форма:

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - M(x))(y_{i+l} - M(y)), \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

При этом нормированная взаимная корреляционная функция принимает вид:

$$R_{xy}^*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{D(x)D(y)}} R_{xy}(\tau), \quad R_{xy}^*(\tau) \in [0, 1].$$

Для k - мерного временного ряда справедливо следующее матричное

представление взаимно корреляционных функций:

$$\mathbf{C}(\tau) = \begin{pmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) & \cdots & R_{1k}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) & \cdots & R_{2k}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1}(\tau) & R_{k2}(\tau) & \cdots & R_{kk}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} & \cdots & K_{1k} \\ K_{21} & 1 & \cdots & K_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1} & K_{k2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Приведенные матрицы называются корреляционными или ковариационными матрицами. Корреляционная матрица в нуле представляет симметричную матрицу с единичной главной диагональю. Внедиагональные члены корреляционной матрицы представляют собой коэффициенты корреляции между соответствующими компонентами многомерного временного ряда. Коэффициенты корреляции характеризуют связанность двух составляющих многомерного временного ряда.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Для непрерывной функции $x(t)$ интегральное преобразование вида:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

называется спектральной плотностью функции $x(t)$ или спектром мощности, автоспектром мощности. Выражение (2.1) является преобразованием Фурье на полубесконечном интервале. В (2.1) ω - частота, i - мнимая единица.

Функция спектральной плотности $S(\omega)$ задает распределение мощности сигнала $x(t)$ по частоте ω . Например, на Рисунке 2.1 приведен график $|S(\omega)|$ (модуль берется поскольку $S(\omega)$ величина комплексная) для сигналов вида $x(t) = A_i \sin(\omega_i t)$, $i = 1, 2, 3$.



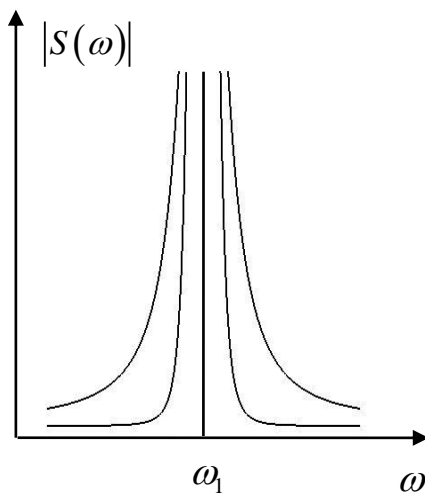
Рисунок 2.1. Пример спектра мощности трехгамонического процесса

Далее, заметим, что выражение (2.1) определяет спектральную плотность на полу-бесконечном интервале. На практике, функция $x(t)$ определена на конечном интервале $t \in [0, T]$, поэтому, (2.1) используют в виде:

$$S^*(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

Следует отметить, что спектральные плотности $S^*(\omega)$ и $S(\omega)$ имеют различия. Эти отличия спектральных плотностей можно увидеть из сравнения соответствующих графиков спектров для моногармонического процесса – Рисунок 2.2. $S^*(\omega)$ является оценкой $S(\omega)$ на ограниченном интервале и связаны соотношением

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} S^*(\omega)$$



На практике длина интервала T всегда ограничена, иногда очень сильно, поэтому задача уменьшения влияния длины интервала на оценку спектральной плотности актуальна. Для уменьшения искажений $S^*(\omega)$ используют специальные функции $w(t)$, называемые временными окнами и определенные на интервале $t \in [0, T]$.

Рисунок 2.2. Влияние длины интервала на оценку спектральной плотности. Оценки спектральной плотности процессов с учетом временного окна находятся:

$$S^*(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.3)$$

При обработке сигналов используют различные виды временных окон. Окно, удовлетворяющее условию

$$w(t) = 1, t \in [0, T]$$

называется прямоугольным – рисунок 2.3 а. Окно, заданное функцией

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right)$$

называется окном Хэннинга – рисунок 2.3 б. Помимо этих окон на практике применяются трапецевидное, Кайзера- Бесселя, flat- top окна [].

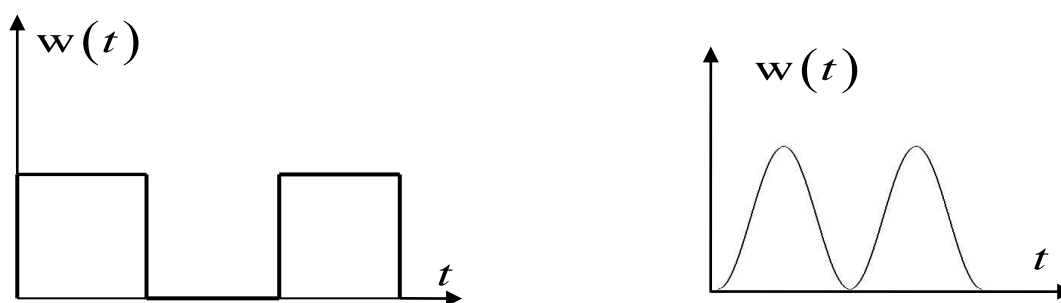


Рисунок 2.3. Графики функций прямоугольного окна (а) и окна Хэннинга (б).

Для получения оценок спектральной плотности по дискретным временным рядам, что требуется на практике, применяется дискретное преобразование Фурье для дискретной функции $y(t)$:

$$S^*(\omega_i) = \frac{1}{hN} \sum_{j=1}^N y(t_j) (\cos \omega_i t_j + i \sin \omega_i t_j), i = 1, 2, \dots, N, i \quad (2.4)$$

$S^*(\omega_i)$ — дискретный спектр;

N — число точек реализации функции $y(t)$;

h — шаг реализации;

ω_1 — минимальная частота в дискретном спектре

$$\omega_1 = 2\pi \frac{1}{hN} = 2\pi \frac{1}{T}. \quad (2.5)$$

ω_N —максимальная теоретическая частота в дискретном спектре

$$\omega_N = 2\pi \frac{1}{h}. \quad (2.6)$$

$\Delta\omega = \omega_1$ — шаг по частоте дискретного спектра равен минимальной частоте спектра. ω_i — круговая частота является аргументом функции спектральной плотности

$$\omega_i = \omega_1 + \Delta\omega(i-1) \quad (2.7)$$

имеет размерность рад/с. В практических приложениях спектры строятся, как правило, в зависимости от циклической частоты f , измеряемой в Герцах, и связанной с круговой частотой формулой $\omega = 2\pi f$;

Максимальная теоретическая частота дискретных спектров, как правило, не используется в приложениях. Максимальную частоту дискретного спектра принято ограничивать величиной

$$\omega_{\max} = \omega_N/2, \quad (2.8)$$

называемую частотой Найквиста. Иногда в качестве частоты Найквиста используют выражение

$$\omega_{\max} = \omega_N/2.56.$$

Для расчета спектров, т.е. вычисления сумм вида (2.4) используется специальный алгоритм Быстрого Преобразования Фурье (БПФ), который работает с длинами реализаций равными некоторой степени двойки. Число точек N для вычисления БПФ берется равным 512, 1024, 2048 и т.д. Полная длина реализации, как правило, не совпадает с указанными значениями, на практике она значительно больше. В этом случае полная реализация разбивается на блоки длиной, например, 1024 точки, для каждого блока вычисляется спектр, который потом усредняется – для каждой точки спектра берется среднее арифметическое значений этой точки всех блоков. Разбиение полной

реализации на блоки выполняется с некоторым перекрытием блоков – некоторое число последних точек блока может совпадать с первыми точками следующего блока. Максимальная длина перекрытия соседних блоков может составлять 50% длины блока. Большее перекрытие не улучшает статистические характеристики получающихся оценок точек спектров.

Проиллюстрируем основные закономерности построения дискретных спектров на примерах. На рисунке 2.4 показан временной ряд полигармонического процесса с кратными гармониками. Первая гармоника имеет частоту 722 Гц. На рисунке 2.5 представлен график квадрата модуля спектральной плотности этого процесса при использовании трех типов временных окон. На всех последующих графиках спектральной плотности (автоспектрах) по оси ординат будет откладываться квадрат модуля спектральной плотности и обозначаться S . Как видно из рисунка 2.5 прямоугольное временное окно (неизменный сигнал) дает самое высокое разрешение спектральных пиков, однако фоновое значение спектра составляет -100дБ. Окна Хэннинга и Flat Top, обладают меньшим разрешением – ширина спектрального пика у них шире, однако фоновое значение спектров составляет -150 и -200 дБ соответственно.

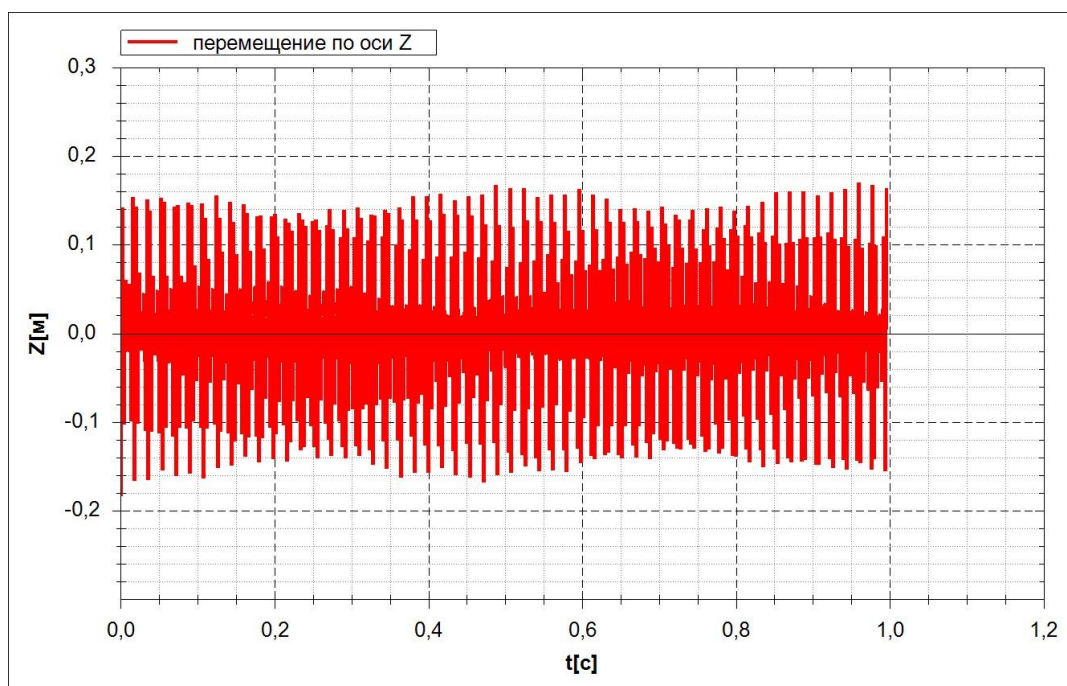


Рисунок 2.4. Пример временного ряда полигармонического процесса. Шаг

дискретизации 0.00005 с. (20 кГц).

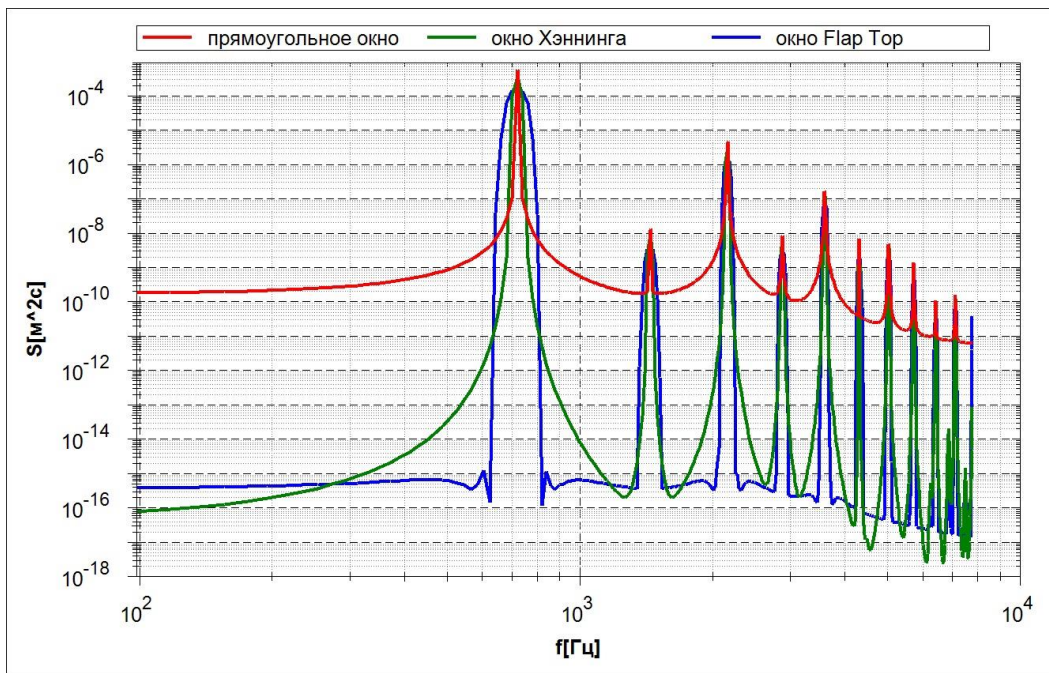


Рисунок 2.5. Модуль автоспектра полигармонического процесса (рисунок 2.4) для трех типов временного окна.

Графики характеристик спектральной плотности принято строить в логарифмическом масштабе по обеим осям. Линейный масштаб не позволяет сопоставить спектральные пики с большой разницей в уровнях. Для примера на рисунке 4.6. приведен спектр рисунка 4.5. в линейном масштабе, из которого видно, что в этом случае графики спектров гораздо менее информативны.

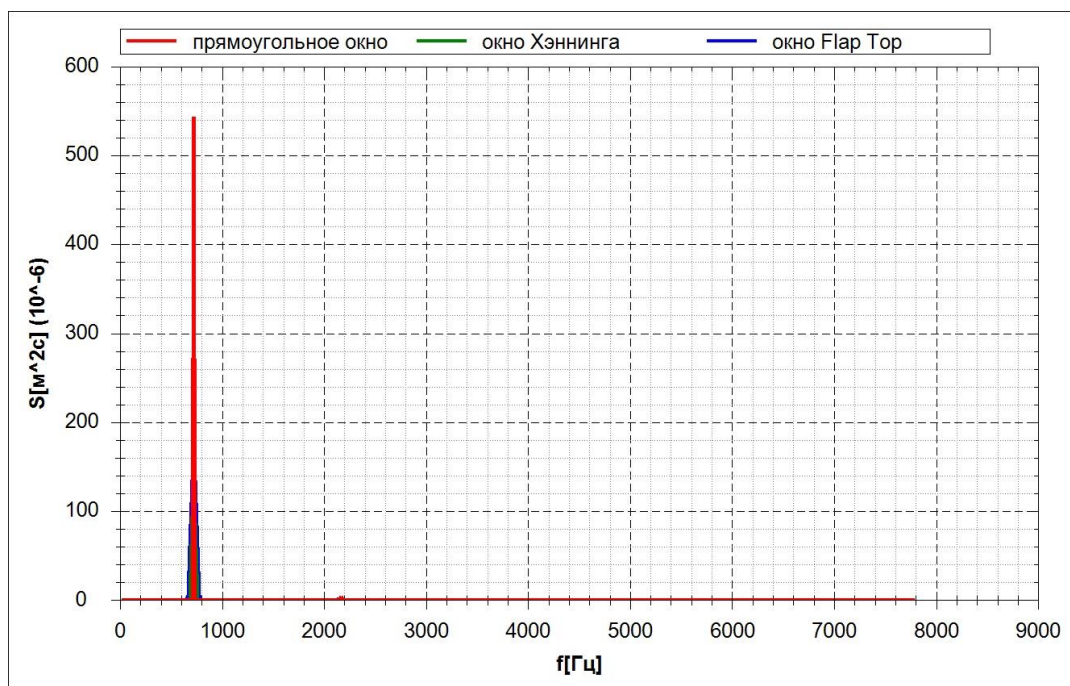


Рисунок 2.6. Модуль автоспектра полигармонического процесса в линейном масштабе.

Спектры на рисунках 2.5, 2.6. строились с помощью БПФ с длиной блока 1024 точки. Минимальная частота и разрешение спектра, рассчитанные по (2.5) составляют 19.53 Гц. Максимальная частота, показанная на графиках, рассчитанная по (2.8) составляет 7812 Гц. Максимальную частоту можно увидеть на графиках 2.5, 2.6.

На рисунке 2.7 показаны спектры рассматриваемого полигармонического процесса, построенные при различных длинах блока БПФ и использовании окна Хэннинга. Как следует из рисунка, при уменьшении длины блока (времени реализации) увеличиваются фоновые значения спектров и, в соответствии с формулой (2.5) увеличивается минимальная частота спектра и шаг по частоте. Для блока длиной 256 точек указанные величины увеличиваются в 4 раза (по сравнению с блоком длиной 1024) и составляют 78.12 Гц.

Увеличение общей длины временного ряда в два раза, что приводит к удвоению числа усреднений вычисленных точек спектра несколько снижает фоновые значения спектров, особенно на высоких частотах – рисунок 2.7.

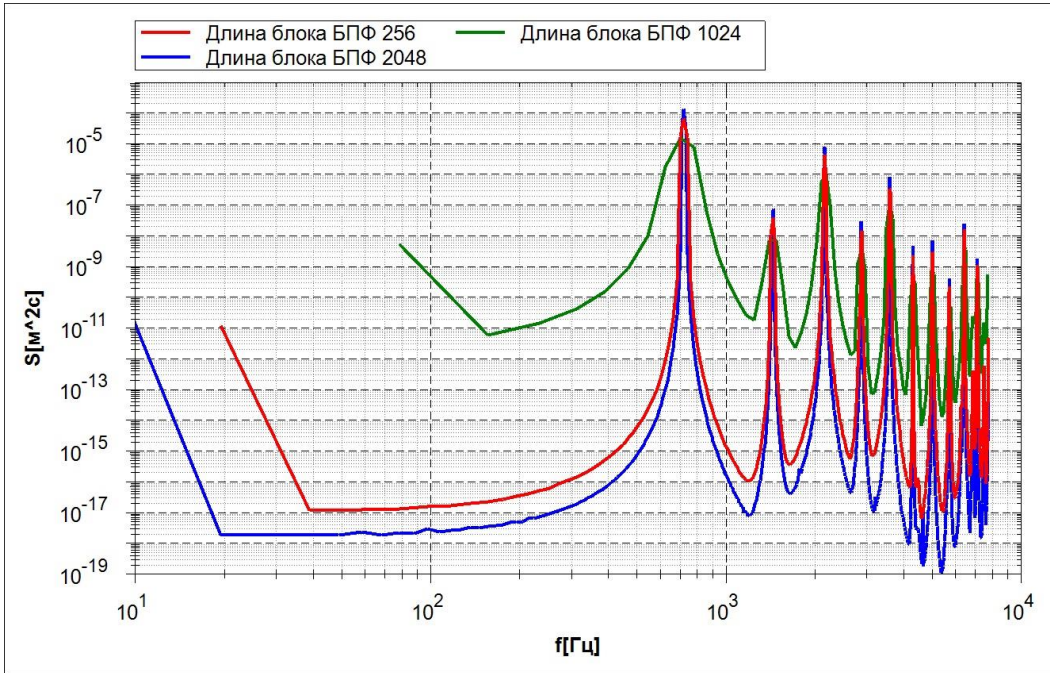


Рисунок 2.7. Модуль автоспектра полигармонического процесса для трех длин блока данных БПФ.

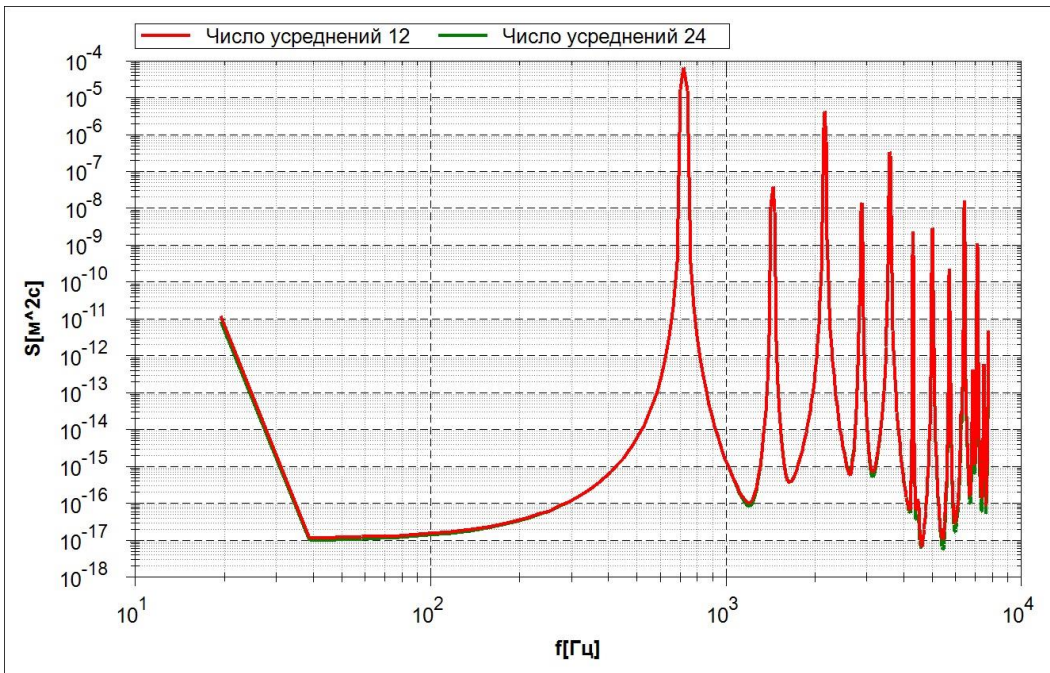


Рисунок 2.8. Модуль автоспектра полигармонического процесса для разных значений числа усреднений по блокам БПФ.

Значимым эффектом, возникающим при построении спектров по временным реализациям ограниченной длины, является эффект алиазинга, который выражается в появлении ложных спектральных пиков от частот содер-

жащихся во временном ряде, но лежащих выше максимальной частоты дискретного спектра (2.6). Так, если реализацию, показанную на рисунке 2.4, записать с частотой 2000 Гц (шаг дискретизации 0.0005 с.), то ее спектр будет содержать несуществующие спектральные пики на частотах, меньших первой гармоники – рисунок 2.9. Алиазинг существенно влияет на анализ экспериментальных реализаций, поскольку в них всегда содержатся случайные возмущения, имеющие спектр белого шума. Для подавления этого эффекта, измеряемый сигнал пропускают через фильтры, снижающие высокочастотную область измеряемого процесса. Элементы теории таких фильтров представлены в следующей главе.

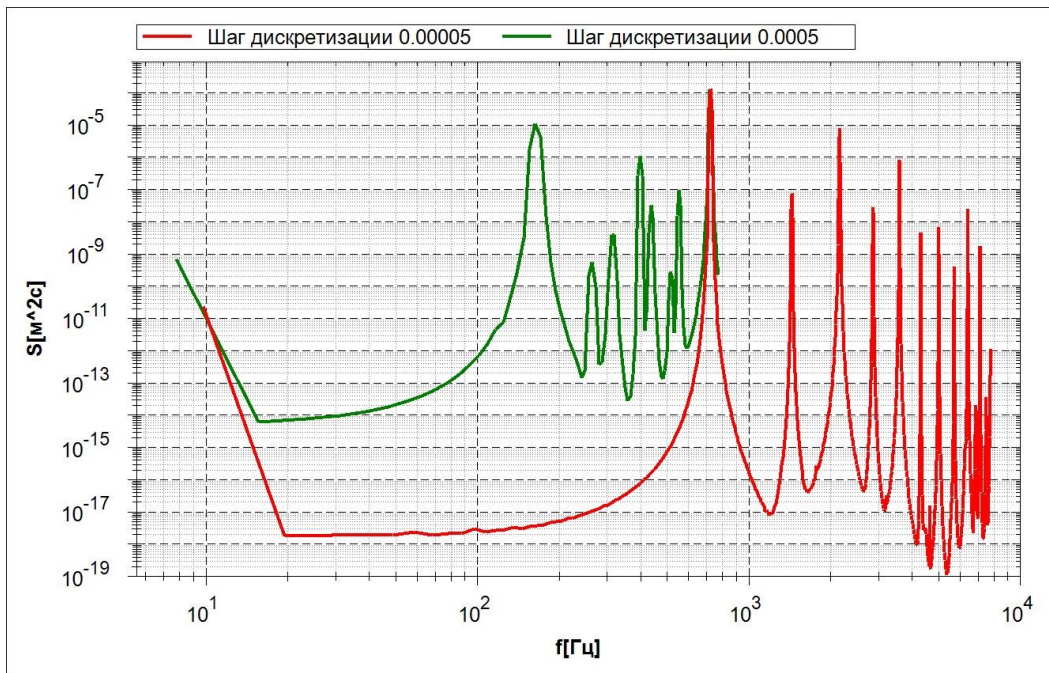


Рисунок 2.9. Модуль автоспектра полигармонического процесса для двух разных шагов дискретизации. При большом шаге дискретизации появляются несуществующие пики спектров - алиазинг.

Разрешающая способность оценок спектров зависит так же от соотношения частот гармоник, присутствующих в реализации, и частот спектра, для которых строится его оценка. Дискретный ряд значений частот, в которых вычисляется оценка дискретного спектра определяется выражением (2.7). На характеристики оценки спектра некоторой гармоники влияет соотношение

частот этой гармоники процесса и ближайшей к ней абсциссы дискретного спектра. Принято рассматривать два случая соотношения таких частот – лучший и худший. Лучший случай соответствует равенству частот рассматриваемой гармоники и ближайшей абсциссы спектра. Худший случай – частота рассматриваемой гармоники лежит посередине между двумя точками спектра.

Поясним это на примере. Возьмем процесс с двумя гармониками на частотах 25 и 60 Гц, с амплитудами 2 и 0.5 соответственно. Лучшему случаю соответствует шаг дискретизации процесса удовлетворяющий выражению

$$h = \frac{n}{fN}. \quad (2.9)$$

Здесь f частота гармоники, под которую подбирается шаг дискретизации, n целое число, которое подбирается таким, чтобы шаг дискретизации удовлетворял условию Найквиста. Для максимальной частоты рассматриваемого процесса 60 Гц, при $n=96$ и $N=1024$, $h = 0.0015625$. Легко убедиться, что указанное значение шага является лучшим и для гармоники 25 Гц ($n=40$). Худшее значение шага находится из условия

$$h = \frac{(n + 0.5)}{fN}. \quad (2.10)$$

Для рассматриваемой гармоники при $n=96$ и $N=1024$, худший шаг $h = 0.00158203$.

На рисунке 2.10 показаны спектры двухгармонического процесса для лучшего и худшего шага дискретизации и двух типов временных окон. Как следует из этих графиков, лучший шаг дискретизации обеспечивает высокое разрешение спектрального пика, которое применение временного окна улучшает незначительно. Спектр, построенный при худшем шаге дискретизации, значительно улучшается за счет использования временного окна. В практических случаях, частоты исследуемых процессов редко бывают известны и стабильны, поэтому выбрать лучший шаг дискретизации не пред-

ставляется возможным, т.е. в реализации всегда может появиться гармоника с частотой, для которой используемый шаг дискретизации не является лучшим. Это обуславливает необходимость применения временных окон при построении спектров.

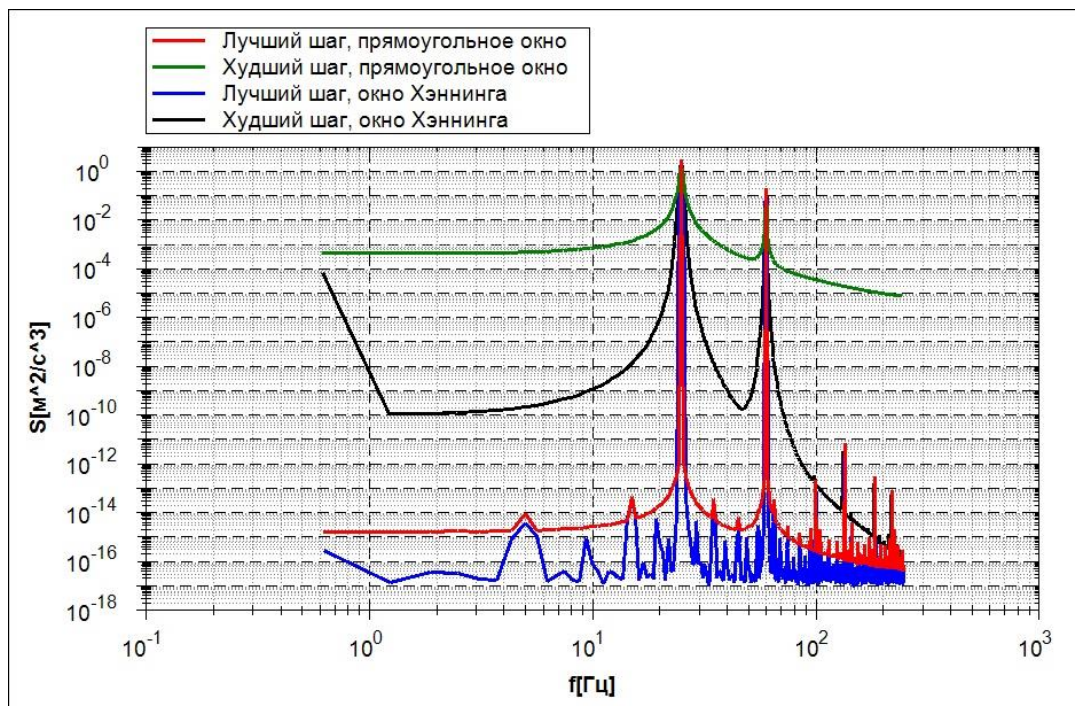


Рисунок 2.10. Спектры двухгармонического процесса для случаев лучшей и худшей частот дискретизации.

Спектральные плотности процессов обладают интегральными свойствами, в частности интеграл от спектра на интервале $[0, \infty]$ равен дисперсии случайного процесса, для которого был построен спектр

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (2.11)$$

Интеграл от спектра на конечном интервале $[\omega_1, \omega_2]$ определяет среднее квадратическое отклонение (СКО) σ^* процесса на этом интервале.

$$\sigma^* = \sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega}. \quad (2.12)$$

На рисунке 2.11 показан в увеличенном масштабе по частоте первый спектральный пик 25 Гц. рассматриваемого процесса. СКО процесса на от-

резке [23, 27] Гц равно 1.41421 для реализации с лучшим шагом. Это значение почти точно соответствует СКО синусоиды, равному $A \frac{\sqrt{2}}{2}$ где A - амплитуда синусоиды. В нашем случае $A=2$ и теоретическое СКО составляет 1.41421, что точно соответствует СКО, рассчитанному по спектру рисунка 2.11. Для оценки спектра в случае худшей частоты дискретизации значение СКО в этом интервале на несколько процентов меньше теоретического. Само значение дискретного спектра в точке максимума, может приближаться к квадрату амплитуды гармоники на данной частоте, но сильно зависит от параметров построения дискретного спектра. Состоятельной оценкой амплитуды соответствующей гармоники процесса является СКО в интервале, охватывающем спектральный пик.

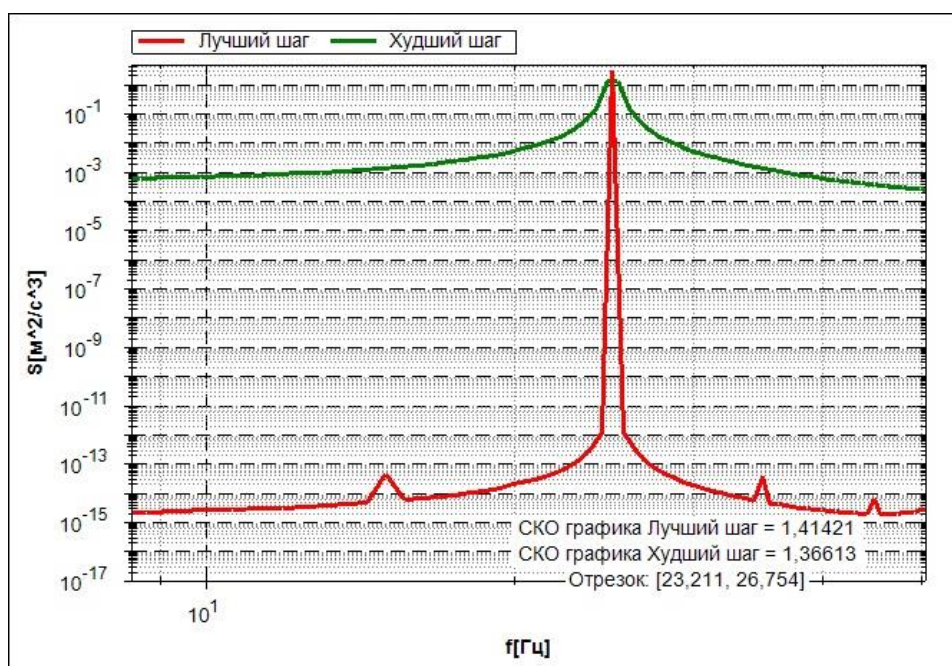


Рисунок 2.11. Спектральный пик на частоте 25 Гц (увеличено) двухгармонического процесса для случаев лучшей и худшей частот дискретизации. Прямоугольное окно.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

3.1. Передаточные функции непрерывных систем

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется интеграл:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (3.1)$$

где $s = \sigma + i\omega$. Преобразование Лапласа отличается от преобразования Фурье аргументом экспоненты – добавлена вещественная часть σ . Функция $F(s)$

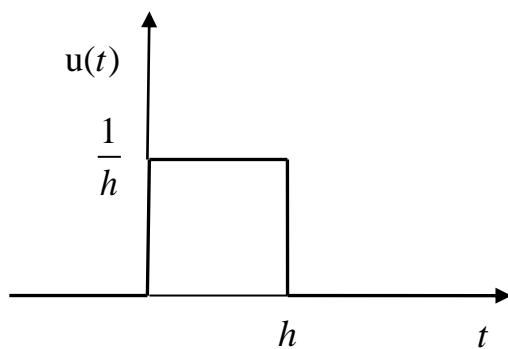


Рисунок 3.1 Графическое представление функции Дирака.

называется изображением функции $f(t)$.

Для изображений существует таблица преобразований Лапласа.

Например, в теории управления рассматриваются, в частности, сигналы, поступающие на вход системы, представляющие

единичный скачок $\mathbf{1}(t)$ и δ - функция (импульсная). Первая введена Хэвисайдом

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad \text{– Функция Хэвисайда.}$$

вторая Дираком:

Пусть на вход системы $f(t)$ поступает следующий прямоугольный импульс длины h рис.1. Эта функция является кусочно- постоянной

$$y_h = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } t \in (0, h) \\ 0 & \text{при } t \notin (0, h) \end{cases}.$$

Площадь такого импульса при изменении его длины будет всегда равна 1.

Однако, очевидно, что: $\frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$. Производные таких функций иногда также называют функциями Дирака.

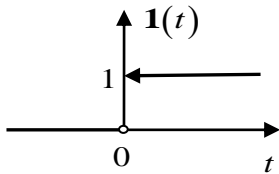


Рисунок 3.2. Графическое представление функции Хэвисайда.

Функция Хэвисайда связана с δ - функцией (импульсного типа) через производную: $\frac{d}{dt}(\mathbf{1}(t)) = \delta(t)$ [1] и

является импульсом бесконечно большой амплитуды

и бесконечно малой длительности, удовлетворяющий

условию: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Заметим, что функция $\mathbf{1}(t)$

имеет разрыв в нуле. Более строгое обоснование предельного перехода можно найти в [2]

Для δ - функции преобразование Лапласа примет вид:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau}$$

Преобразование Лапласа от производной функции $f(t)$ записывается как:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) получается, если взять по частям интеграл в левой части равенства (3.2). Преобразование Лапласа от второй производной функции $f(t)$ имеет вид:

$$\int_0^{\infty} f''(t) e^{-st} dt = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (3.3)$$

Аналогично записываются производные любого порядка — изображение функции умножается на переменную s , в степени, равной порядку производной (плюс многочлен от s с коэффициентами, равными значениям функции и ее производных в нуле. Выражения (3.2), (3.3) широко используются на практике, поскольку позволяют представлять линейные дифферен-

циальные уравнения, а так же системы таких уравнений, в алгебраической форме.

Например, пусть дано неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = y(t), \quad (3.4)$$

где $y(t)$ - заданная функция. Преобразование Лапласа левой и правой части уравнения (3.4) даст

$$as^2X(s) + bsX(s) + cX(s) = Y(s), \quad (3.5)$$

где $X(s), Y(s)$ - изображения, соответственно, функций $x(t), y(t)$. Уравнение (3.5) может быть записано в форме

$$(as^2 + bs + c)X(s) = Y(s) \quad ;$$

Или

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c}. \quad (3.6)$$

Функция комплексной переменной

$$W(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (3.7)$$

называется передаточной функцией. Это отношение изображения выхода системы к изображению входа. При записи передаточной функции вместо аргумента s используется аргумент $p = i\omega$, где ω - некоторый параметр, называемый частотой. Равенство (3.6) можно переписать как

$$W(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}. \quad (3.8)$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы (3.4) называется модуль функции $W(p)$

$$|W(p)| = \left| \frac{1}{a(i\omega)^2 + b(i\omega) + c} \right| \quad (3.9)$$

Величина

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(W(\omega))}{\operatorname{Re}(W(\omega))} \right) \quad (3.10)$$

называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ) системы (3.4). АЧХ и ФЧХ являются важными характеристиками линейных систем вида (3.4). Сами линейные дифференциальные уравнения могут использоваться как непрерывные фильтры, изменяющие спектральные характеристики входного сигнала в соответствии с АЧХ и ФЧХ системы. Уравнения (3.4) используются для конструирования как аналоговых, так и цифровых фильтров с заданными свойствами. В случае аналогового фильтра уравнение (3.4) воспроизводится в виде системы электронных элементов, на вход которой подается $y(t)$, а на выходе снимается преобразованный сигнал $x(t)$. Использование уравнения (3.4) в качестве цифрового фильтра сводится к его численному интегрированию. Спектр выходного сигнала в этом случае

$$S_x(\omega) = |W(p)| S_y(\omega), \quad (3.11)$$

Где $S_y(\omega)$ спектр входного сигнала, $S_x(\omega)$ спектр выходного.

Рассмотрим пример построения АЧХ и ФЧХ для передаточной функции (3.8). Считая $p = i\omega$ преобразуем (3.8) к виду

$$W(p) = \frac{1}{a(i\omega)^2 + b(i\omega) + c} = \frac{1}{(c - a\omega^2) + b\omega i}$$

Умножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное число $(c - a\omega^2) - b\omega i$, получаем

$$\frac{(c - a\omega^2) - b\omega i}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} = \frac{(c - a\omega^2)}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} - \frac{b\omega i}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2},$$

где

$$\operatorname{Re}W(\omega) = \frac{(c - a\omega^2)}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} ;$$

$$\operatorname{Im}W(\omega) = -\frac{b\omega}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

действительная и мнимая части функции $W(\omega)$, соответственно. АЧХ - модуль передаточной функции $|W(\omega)|$ равен

$$|W(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Im}^2(\omega) + \operatorname{Re}^2(\omega)}$$

ФХЧ – фазочастотная характеристика равна

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b\omega}{a\omega^2 - c}\right)$$

Графики АЧХ и ФХЧ приведены на Рисунке 3.3.

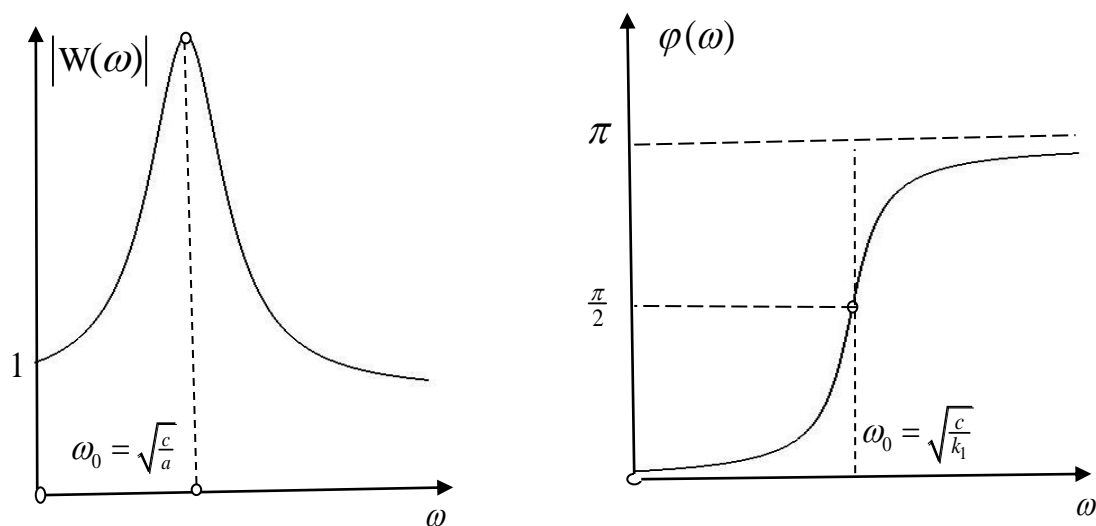


Рисунок 3.3. АЧХ системы (3.4) – а, ФХЧ системы (3.4) - б

3.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. Z –ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для кусочно-постоянной функции $f(t)$ с постоянным шагом дискретизации h преобразование Лапласа выражается следующим образом:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f_n(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n (e^{-snh} - e^{-s(n+1)h})}{s} = \frac{1 - e^{-sh}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-snh}, \quad (3.12)$$

где множитель перед суммой (3.12) можно не учитывать.

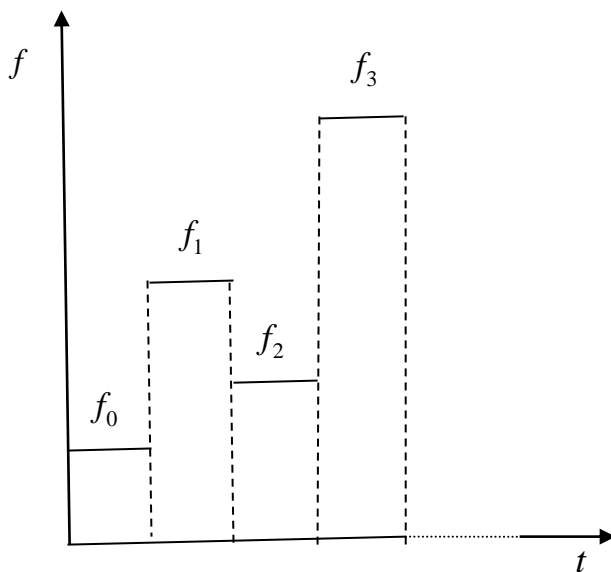


Рисунок 4 3.4. Пример графика кусочно постоянной функции - временного ряда.

Если обозначить $z(s) = e^{sh}$, то (3.12) можно записать в следующей форме:

$$Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}(s)$$

Функция Z называется Z -преобразованием. Это преобразование, в частности, используется для анализа дискретных временных рядов и разностных уравнений. Z -

преобразование для смещенного на k шагов ряда можно записать в виде:

$$Z_k(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \int_{(n-k)h}^{(n-k+1)h} e^{-st} f_{n-k} dt = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-s(n-k)h} f_n = z^{-k} Z(s) \quad (3.13)$$

Таким образом, операция сдвига в Z -преобразовании эквивалентна умножению исходного изображения на $\frac{1}{z^k}$. Как и в случае преобразования Лапласа, наибольший интерес представляет не само Z преобразование, а его свойства, в частности, (3.13), которое позволяет проводить анализ разностных уравнений, которые состояются из элементов дискретного временного ряда.

Рассмотрим возможности Z преобразования на примере разностного уравнения. Возьмем разностное уравнение

$$y_n = \frac{1}{3}(f_n + f_{n-1} + f_{n-2}), \quad (3.14)$$

где, еще раз укажем, f_n, f_{n-1}, \dots значения временного ряда в моменты времени t_n, t_{n-1}, \dots и т.д. Разностное уравнение (3.14) есть простейший фильтр, т.н. скользящее среднее значение по последним трем значениям текущей точки временного ряда. Выполнив Z -преобразование обеих частей (3.14) с учетом (3.13), получим

$$Y(z) = \frac{1}{3}F(z) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right), \quad (3.15)$$

где $Y(z)$ Z преобразование y_n , $F(z)$ Z преобразование f_n . (3.15) можно представить в виде

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$$

Функция $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$ является передаточной функцией дискретной системы. Для практики интерес представляет модуль передаточной функции

$$|H(z)|^2 = H(z)H(z^{-1}), \quad (3.16)$$

Передаточную функцию можно вычислить непосредственно из (3.16), положив $z = e^{i\omega h}$. В этом случае передаточная функция будет зависеть от частоты ω и являться аналогом частотной характеристики - модуль $|H(z)|$ есть АЧХ дискретного преобразования. Если $z = e^{i\omega h}$, тогда

$$H(\omega) = \frac{1}{3} \left(1 + e^{-i\omega h} + e^{-2i\omega h} \right)$$

Используя формулу Эйлера можно переписать

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(1 + \cos \omega h - i \sin \omega h + \cos 2\omega h - i \sin 2\omega h). \quad (3.17)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} H(\omega) = \frac{1}{3}(1 + \cos \omega h + \cos 2\omega h),$$

$$\operatorname{Im} H(\omega) = -\frac{1}{3}(\sin \omega h + \sin 2\omega h).$$

Окончательно

$$|H(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 H(\omega) + \operatorname{Im}^2 H(\omega)}, \quad (3.18)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} H(\omega) / \operatorname{Re} H(\omega)) \text{ ост} \quad (3.19)$$

Качественный анализ АЧХ и ФЧХ по выражению (3.17) провести сложно, построим графики АЧХ и ФЧХ численно – рисунки 3.5, 3.6. Графики строились для величины $h = 0.1$ с. Передаточная функция (АЧХ) трехточечного фильтра на интервале частот $[0, 5]$ имеет два экстремума и один ноль. Экстремумы соответствуют частотам 0 и 5 Гц. При нулевой частоте, передаточная функция равна 1. Частота 5 Гц для $h = 0.1$ с равна частоте Найквиста, поэтому именно этот интервал представляет интерес в приложениях. АЧХ есть периодическая функция с периодом $\frac{1}{h}$ Гц, при этом на каждом интервале периодичности она симметрична относительно середины интервала (частоты Найквиста для интервала $[0, 10]$ Гц. Два нуля функции разбивают интервал периодичности на три равные части. Частота первого нуля АЧХ

$$f_1 = \frac{2}{3} f_n$$

f_n – частота Найквиста.

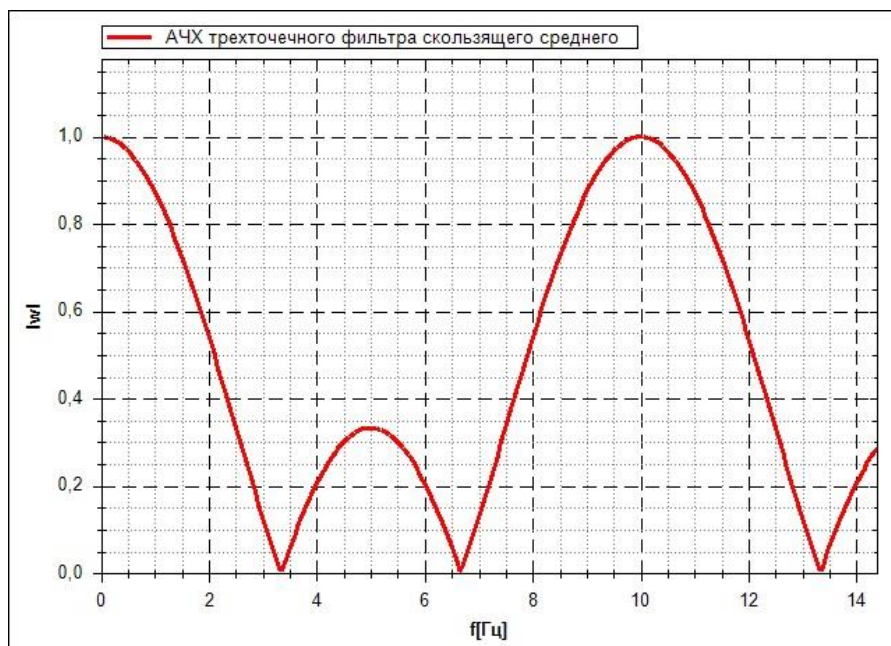


Рисунок 3.5. АЧХ разностного уравнения (3.14).

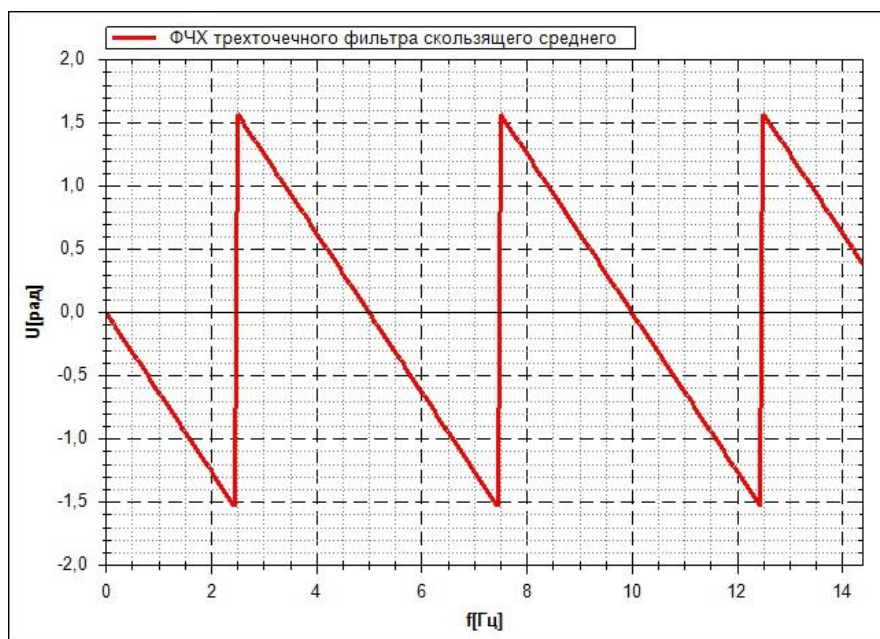


Рисунок 3.6. ФЧХ разностного уравнения (3.14).

ФЧХ фильтра на разностном уравнении (3.14) сильно изменяется на интервале периодичности функции – рисунок 3.6, что значительно ухудшает общие характеристики фильтра. Укажем, что график рисунка 3.6 построен в области определения функции арктангенса. Если учитывать квадрант угла, то фаза фильтра на интервале $[0,10]$ изменяется в линейно от 0 до -2π . Теоре-

тически идеальный фильтр — это фильтр, АЧХ которого имеет ступенчатую форму – равна 1 в заданном частотном диапазоне, и нулю в остальной области. ФЧХ в идеальном случае равна нулю на всех частотах. ФЧХ скользящего фильтра может быть улучшена за счет использования неявного разностного уравнения. Разностное уравнение (3.14) называется явным уравнением – максимальные номера переменных в левой и правой частях одинаковы и равны n . Рассмотрим неявное разностное уравнение для трехточечного фильтра

$$y_n = \frac{1}{3}(f_{n-1} + f_n + f_{n+1}), \quad (3.20)$$

Выполнив Z -преобразование обеих частей (3.20) с учетом (3.13), получим передаточную функцию.

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z} + 1 + z \right),$$

Если $z = e^{i\omega h}$, тогда

$$H(\omega) = \frac{1}{3} (e^{-i\omega h} + 1 + e^{i\omega h})$$

Используя формулу Эйлера можно переписать

$$H(\omega) = \frac{1}{3} (\cos \omega h - i \sin \omega h + 1 + \cos \omega h + i \sin \omega h).$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} H(\omega) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \omega h), \quad (3.21)$$

$$\operatorname{Im} H(\omega) = 0. \quad (3.22)$$

АЧХ, построенная по неявной схеме (3.20) с использованием (3.21) совпадает с АЧХ явной схемы (3.14) – рисунок 3.5. ФЧХ для неявной схемы имеет постоянное нулевое значение, как это следует из (3.22). Однако это утверждение справедливо для точки реализации с номером n . Фактически для вычисления (3.20) необходимо знать точку с номером $n+1$. Таким образом, ФЧХ будет иметь постоянное, отличное от нуля значение, равное

$$\varphi(\omega) = -2\pi \frac{(M-1)/2}{1/h} \quad (3.23)$$

Выражение справедливо для неявного скользящего фильтра из M точек. Таким образом, фильтр скользящего среднего с использованием неявной формулы типа (3.20), обладает постоянным сдвигом фазы и предпочтительнее аналогичного фильтра, построенного по явной формуле (3.14). Нули передаточной функции фильтра из M точек (M нечетное число), разбивают частотный интервал $[0, 1/h]$ на $M-1$ равных частей.

Отметим, что сглаживающие фильтры вида (3.20) широко используют при обработке экспериментальных временных рядов, устраняя случайные флуктуации и другие нежелательные эффекты. Вместе с тем, применение таких фильтров в, например, контурах управления, невозможно, из-за ненулевой фазы смещения отфильтрованного сигнала, что может быть причиной неустойчивости.

Рассмотрим применение фильтров для снижения эффекта алиазинга. Для анализа используем двухгармонический процесс – рисунок 2.10. На рисунке 3.7 показан эффект алиазинга – при шаге дискретизации 0.0125 с, который недостаточен для правильного отображения гармоники с частотой 60 Гц. В этом случае указанная гармоника проявляется на частоте 20 Гц, при этом СКО искаженной гармоники равно СКО корректной гармоники 60 Гц (величина СКО 0.35355).

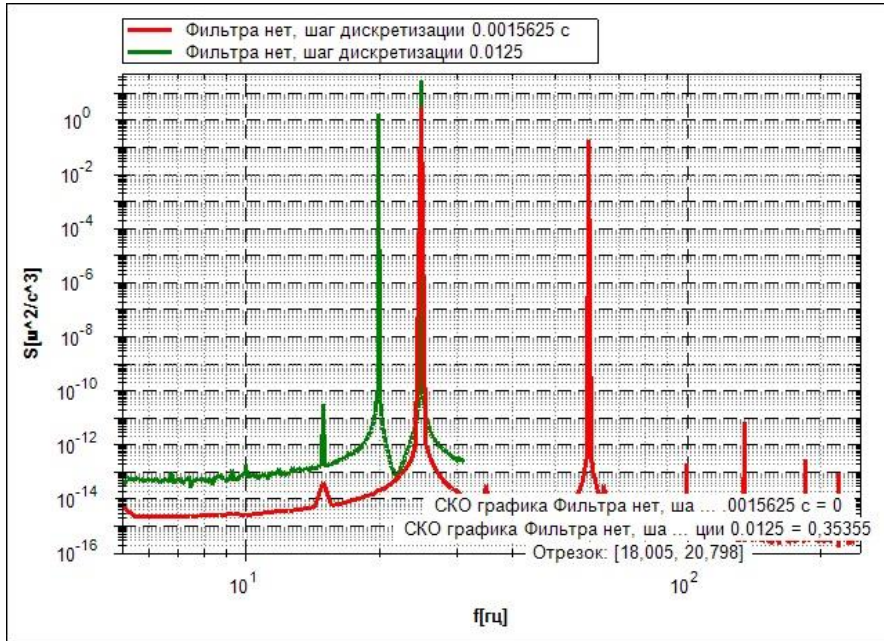


Рисунок 3.7. Спектры двухгармонического процесса, построенные для двух значений шага дискретизации.

Для уменьшения спектрального пика ложной гармоники на частоте 20 Гц применим фильтр скользящего среднего. Настроим фильтр на частоту гармоники 60 Гц. Ближайшее к этой частоте значение числа точек фильтра скользящего среднего с нулем АЧХ в этой области равно 11 – частота нуля АЧХ

$$f_k = \frac{k}{M(1/h)} = \frac{1}{11(1/0.0015625)} = 58.582. \quad (3.24)$$

Здесь k – номер нуля АЧХ фильтра, в нашем случае $k=1$. Спектр процесса с таким фильтром и частотой дискретизации 0.0015625 с показан на рисунке 3.8 – кривая 3 (кривые пронумерованы по порядку перечисления в описании). Как видно из графика, данный фильтр уменьшает пиковое значение спектральной плотности на частоте 60 Гц на 2 порядка по сравнению с исходным сигналом – рисунок 3.7. Если теперь построить спектр для предварительно отфильтрованной реализации с увеличенным шагом 0.0125 с, то величина ложного пика уменьшается почти в 30 раз. Отметим, что реализация с таким увеличенным шагом, получается из предварительно отфильтрованной реализации с исходным меньшим шагом. Если же фильтрацию применить к реали-

зации с уже увеличенным шагом, то влияние на величину ложной гармоники значительно меньше – всего 30 – 40 % - кривая 2 на рисунке 3.8. Кроме этого, такая пост фильтрация значительно влияет и на спектральный пик на частоте 25 Гц.

Таким образом, можно заключить, что для подавления ложных пиков на спектрах от высокочастотных составляющих необходимо применять цифровую фильтрацию к реализациям с малым шагом дискретизации. В существующих аппаратных средствах для получения реализаций от аналоговых сигналов, т.н. АЦП (Аналогово Цифровых Преобразователях) это требование выполняется за счет предварительной фильтрации аналогового сигнала перед дискретизацией.

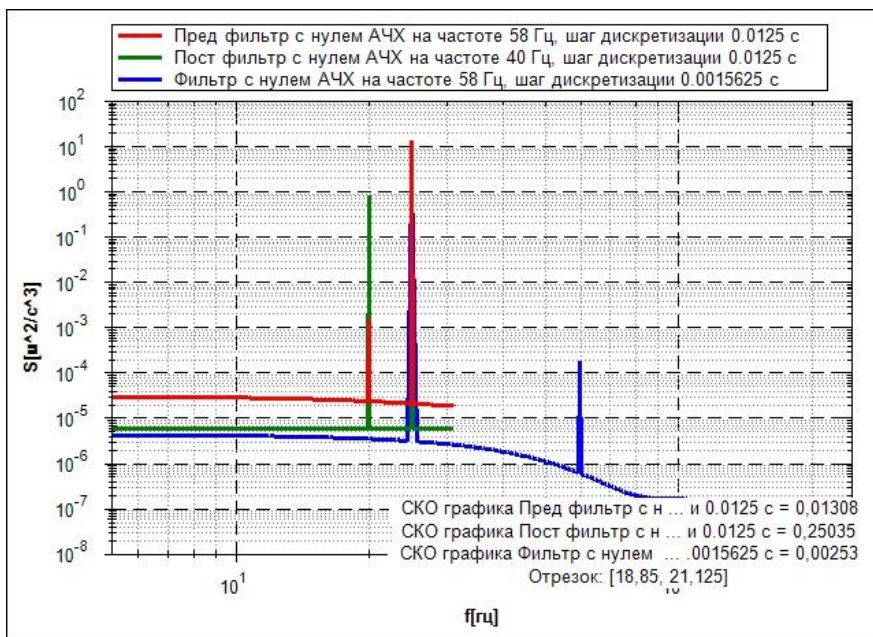


Рисунок 3.8. Влияние фильтрации на алиасинг.

4. ВЗАИМНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В разделе 2 было рассмотрено построение автоспектра (спектральной плотности) одной заданной функции. Значительные возможности для анализа многомерных временных рядов предоставляют методы, основанные на построении взаимных спектральных характеристик процессов. Рассмотрим две функции $x(t)$ и $y(t)$. Запишем преобразование Фурье для этих функций на отрезке T

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.1)$$

$$S_y(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.2)$$

Функции $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ в общем случае комплексные. Модули этих функций, как уже указывалось ранее, называются автоспектрами, или спектрами мощности. Обозначим через $\bar{S}_x(\omega)$ сопряженную с $S_x(\omega)$ функцию. Функцию $S_{xy}(\omega)$, определяемую выражением

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{S}_x(\omega) S_y(\omega) \quad (4.3)$$

называют функцией взаимной спектральной плотности на конечном интервале T . Через функции (4.1) – (4.3) выражаются характеристики связи между процессами $x(t)$ и $y(t)$.

Величина $\gamma_{xy}(\omega)$ определяемая как

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{|S_x(\omega)| |S_y(\omega)|} \quad (4.4)$$

Называется функцией когерентности процессов $x(t)$ и $y(t)$. Функция $\gamma_{xy}(\omega)$ равна величине коэффициента корреляции между процессами $x(t)$ и $y(t)$ на частоте ω . Значения этой функции изменяются от 0 до 1. Нулевое значение

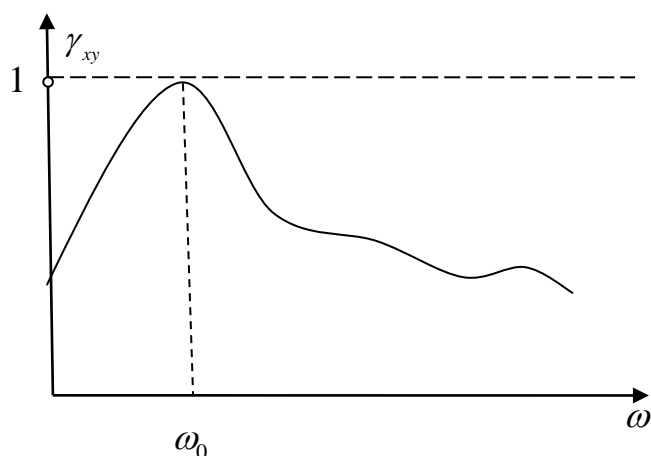


Рисунок 5 4.1 Качественный вид функции когерентности двух процессов.

означает полную независимость временных рядов на данной частоте, значение 1 – временные ряды (процессы) полностью взаимозависимы на этой частоте. Качественный график функции когерентности представлен на рисунке 4.1. График на рисунке 4.1 по-

казывает, что на частоте ω_0 процессы $x(t)$, $y(t)$ сильно

коррелированы.

Величина $H(\omega)$ называется передаточной функцией по $S_x(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} \quad (4.5)$$

В (4.5) предполагается, что $x(t)$ подается на вход некоторой системы, а $y(t)$ является выходом этой системы. По аналогии с (4.5) можно построить передаточную функцию по $S_y(\omega)$. Модуль $|H(\omega)|$ определяет амплитудно-частотную характеристику системы по каналу передачи от $x(t)$ к $y(t)$. В частности, передаточную функцию (4.5) можно использовать для нахождения АЧХ канала передачи сигнала, например, подав на вход белый шум (случайный процесс с постоянной спектральной плотностью). Возможный вид АЧХ, построенной по (4.5) показан на рисунке 4.2.

Взаимная спектральная плотность позволяет определять фазу между двумя процессами как функцию частоты:

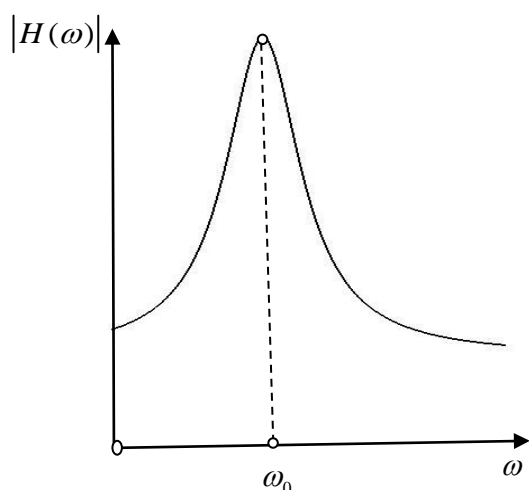


Рис.4.2

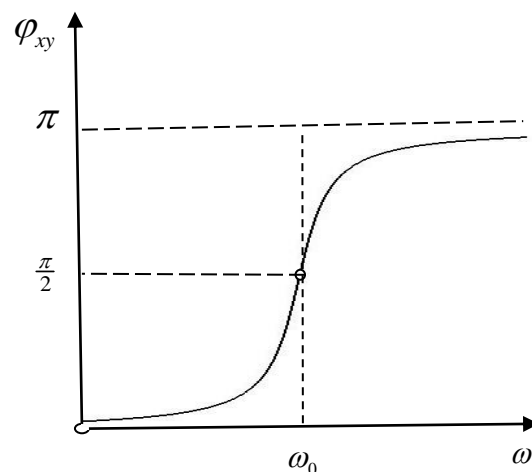


Рис.4.3

$$\varphi_{xy}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} S_{xy}(\omega)}{\operatorname{Re} S_{xy}(\omega)} \quad (4.6)$$

На рисунке 4.3 показан качественный вид такой фазо частотной характеристики. Для расчета (4.1)-(4.6) используют, как правило, дискретные аналоги, основывающиеся на быстром преобразовании Фурье (БПФ).

Взаимные спектральные характеристики и их производные позволяют визуализировать многомерные временные ряды с большим числом гармоник. Рассмотрим набор временных рядов (случайных процессов)

$$y_j(t), j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

где n – количество рядов в наборе. Предполагается, что каждый временной ряд можно поставить в соответствие с некоторой геометрической точкой в трехмерном пространстве и интерпретировать как некоторый кинематический параметр движения этой точки в определенном направлении.

Запишем взаимную спектральную плотность для всех временных рядов по отношению к некоторому выбранному ряду

$$S_{y_k y_j}(\omega) = \lim \frac{1}{T} \bar{S}_{y_k}(\omega) S_{y_j}(\omega), j = 1, 2, \dots, n; k \leq n \quad . \quad (4.8)$$

Здесь $S_{y_j(\omega)}$ - спектральная плотность (автоспектр) j - процесса, k – фиксированный номер процесса, относительно которого строятся все взаимные спектральные плотности, T – длина реализации, ω - частота. Черта над обозначением спектральной плотности означает операцию комплексного сопряжения. Автоспектральная плотность процесса

$$S_{y_j}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T y_j(t) e^{-i\omega t} dt, j = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (4.9)$$

По функциям спектральных плотностей находится взаимная фаза двух процессов

$$\varphi_{y_k y_j}(\omega) = a \tan\left(\frac{\text{Im } S_{y_k y_j}(\omega)}{\text{Re } S_{y_k y_j}(\omega)}\right), j = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (4.10)$$

Представляет также интерес функция когерентности двух процессов

$$\gamma_{y_k y_j}(\omega) = \frac{|S_{y_k y_j}(\omega)|^2}{|S_{y_k}(\omega)| |S_{y_j}(\omega)|}, j = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (4.11)$$

которая задает коэффициент корреляции между двумя процессами на заданной частоте и изменяется в диапазоне 0 - 1.

Движение системы геометрических точек, соответствующих набору временных рядов, на частоте ω можно представить выражением

$$y_j(t) = |S_{y_j}(\omega)| \sin(\omega t + \varphi_{kj}), j = 1, 2, \dots, n; k \leq n \quad . \quad (4.12)$$

Выражение (5) задает движение каждой точки как гармоническое с одинаковой частотой ω , амплитудой равной модулю соответствующей функции автоспектральной плотности, и фазой (4.10). Величина функции когерентности (4.11) может использоваться как условие взаимосвязи колебаний – при малом значении функции когерентности амплитуда соответствующей точки в (4.12) может приниматься равной 0.

Приведем примеры визуализации многомерных временных рядов.

Для визуализации расчетных временных рядов можно использовать результаты моделирования математических моделей. На рисунке 4.4 показана расчетная схема математической модели грузового автомобиля из 86 тел. В результате моделирования получены временные реализации всех координат тел. Построение автоспектров в отдельных точках – рисунок 4.5, не дает представления об общем характере колебаний. На спектре отчетливо видны пики на частотах 0.8, 2 и 4 Гц. Для определения природы этих пиков были построены формы колебаний согласно выражению (4.12). В качестве базового процесса, относительно которого строятся взаимные характеристики, принимались вертикальные ускорения переднего моста. В качестве набора временных рядов использовались координаты (точнее их вторые производные) соответствующих тел – по 6 координат на каждое тело. Это позволяет для построения анимации использовать геометрию расчетной схемы автомобиля.

На рисунке 4.6 показана форма колебаний автомобиля на частоте 0.8 Гц, соответствующей частоте первого спектрального пика рисунка 4.5. Форма колебаний представлена как кинограмма анимации движения по форме со следом. Из рисунка 4.6 отчетливо видно, что колебания на этой частоте можно охарактеризовать как преимущественно угловые колебания всего автомобиля как твердого тела относительно поперечной оси. На рисунке 4.6 показано только движение тел модели по координатам, для которых функция когерентности на этой частоте была не меньше 0.95.

На рисунке 4.7 показана форма колебаний автомобиля на частоте 2 Гц (второй спектральный пик рисунка 4.5). Из рисунка следует, что на этой частоте имеют место упругие колебания передней части рамы по первой форме продольного изгиба. Величина граничного значения функции когерентности также составляла 0.95.

На рисунке 4.8 показана форма колебаний автомобиля на частоте 4 Гц (третий спектральный пик рисунка 4.5). Можно заключить, что на этой частоте колебания происходят по второй форме продольного изгиба рамы. Кроме этого наблюдаются интенсивные противофазные колебания задних мостов. Величина граничного значения функции когерентности при постое-нии этой формы составляла 0.7. При большем значении функции когерентности форма колебаний была похожа на форму колебаний с частотой 2 Гц.

Рассматриваемый метод позволяет строить характеристики колебаний по реализациям ускорений, полученным экспериментально — рисунок 4.9. На этом рисунке показаны амплитуды спектров экспериментальных ускорений точек рамы на частоте 4.3 Гц. Точки замеров показаны на рисунке квадратными маркерами. При анимации перемещаются маркеры точек замеров, а геометрия расчетной схемы автомобиля остается неподвижной и служит для визуальной привязки точек замера. Из рисунка 6 хорошо видно, что на рассматриваемой частоте колебания автомобиля вызваны резонансом по изгибной форме колебаний рамы первого тона.

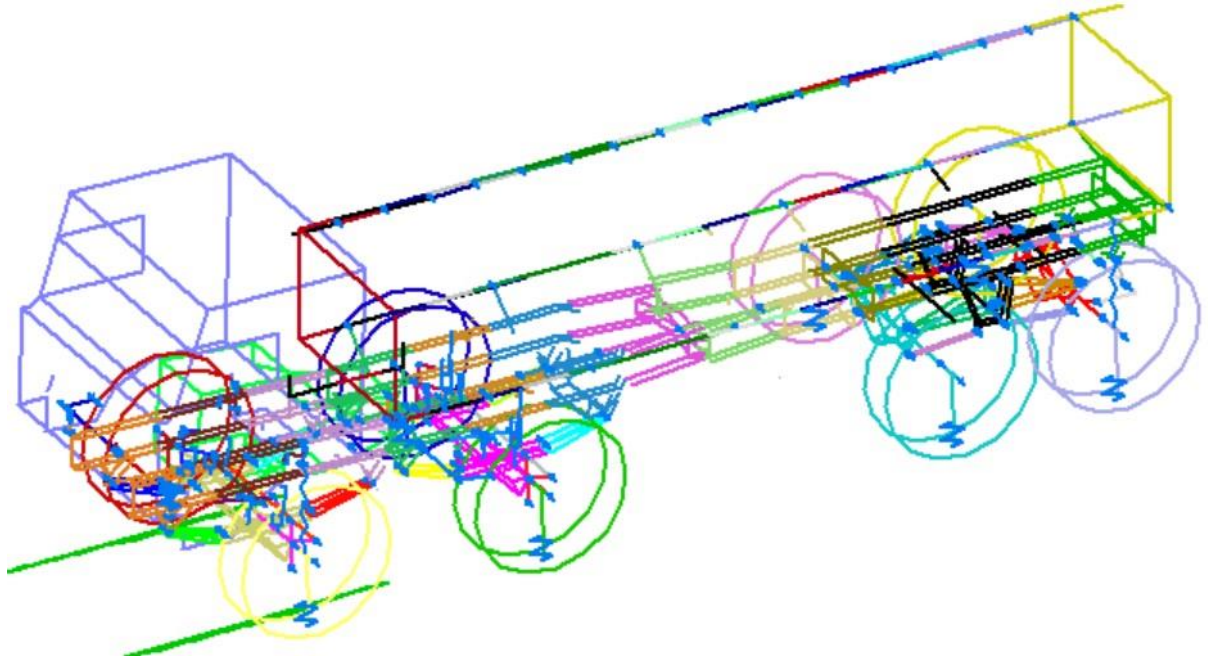


Рисунок 4.4. Расчетная схема грузового автомобиля.

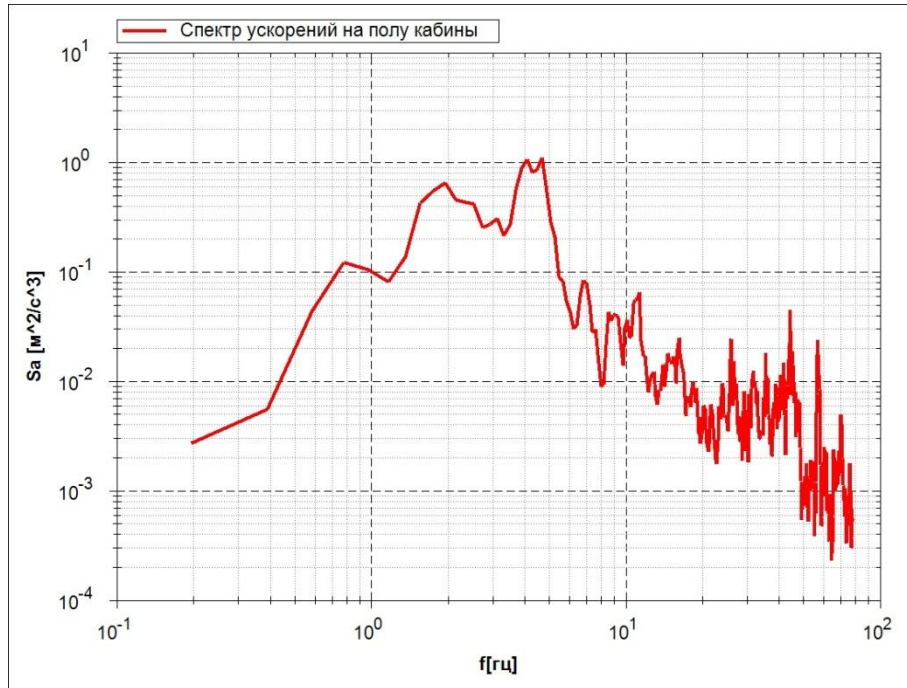


Рисунок 4.5 Типичный расчетный спектр ускорений — вертикальные ускорения на полу кабины.

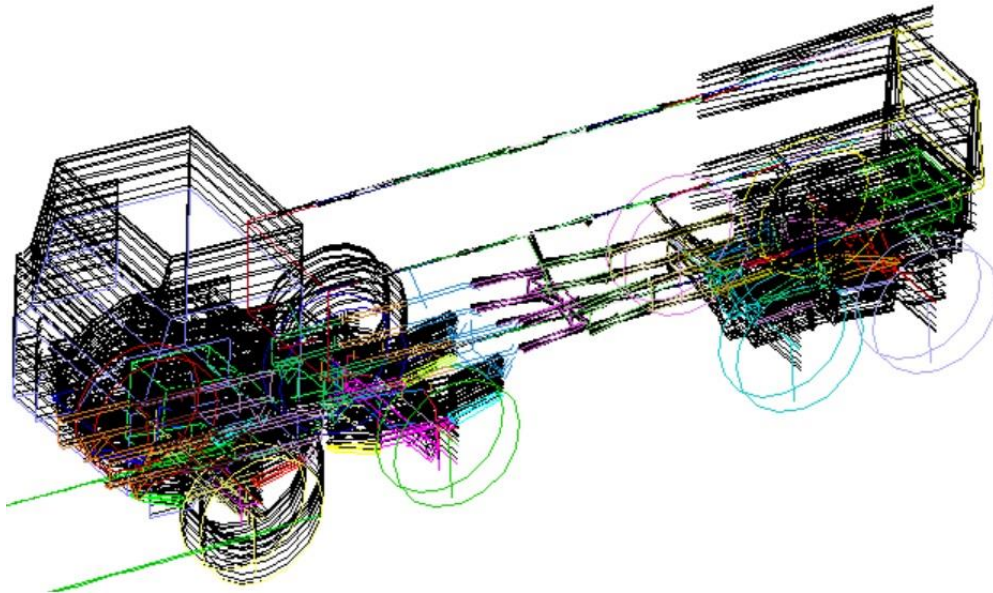


Рисунок 4.6. Частота 0.8 Гц. Угловые колебания как твердого тела относительно поперечной оси.

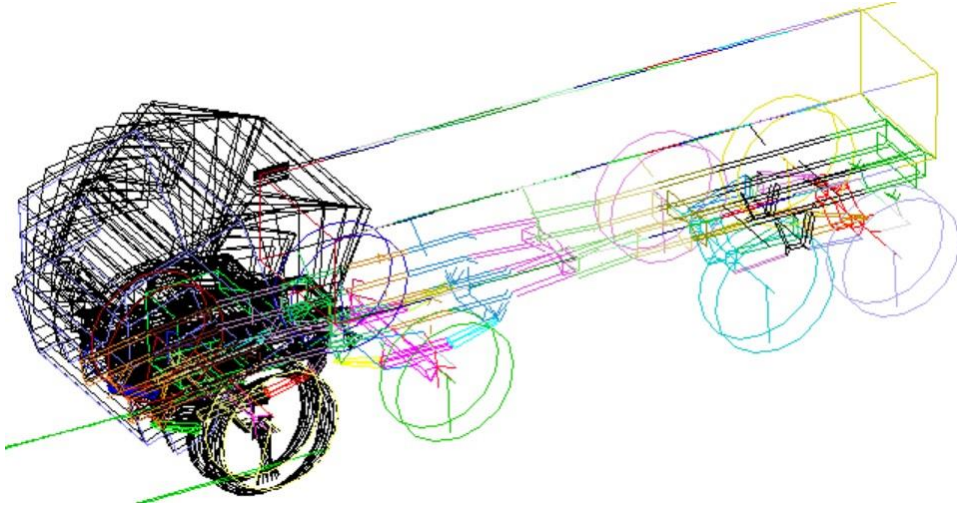


Рисунок 4.7. Частота 2.0 Гц. Угловые колебания кабины и передней части рамы относительно поперечной оси .

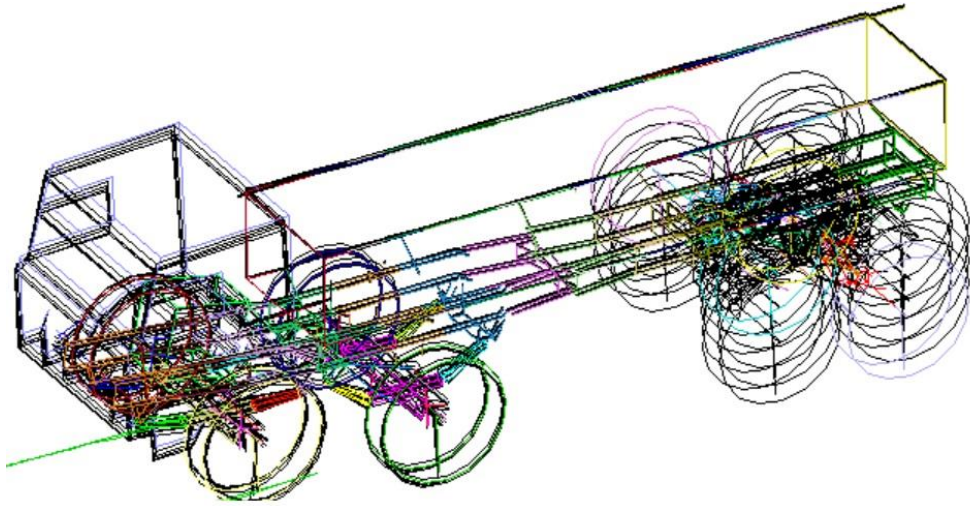


Рисунок 4.8. Частота 4 Гц. Упругие изгибные колебания передней части рамы по второй форме и колебания задних мостов.

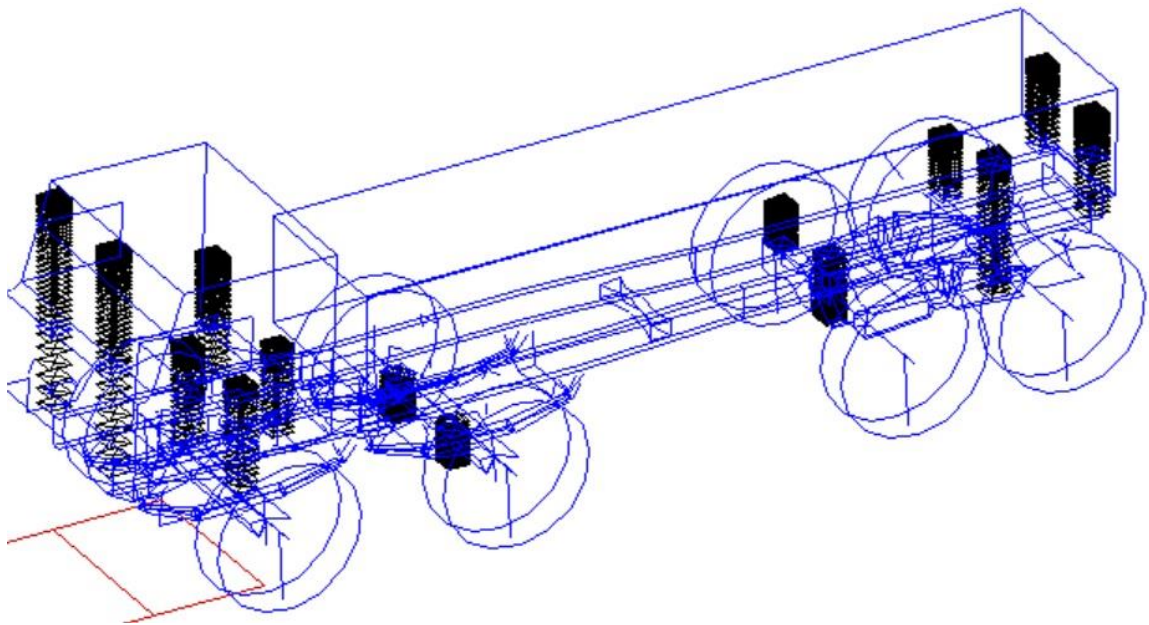


Рисунок 4.9. Пример построения формы колебаний по экспериментальным реализациям ускорений в нескольких точках — частота 4.3 Гц, продольный изгиб рамы первого тона.

ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

Спектральные характеристики временных рядов, рассмотренные выше, строятся в предположении, что процесс является стационарным, т.е. его статистические характеристики постоянны по времени. Для нестационарных процессов становится актуальной задача определения его спектральных характеристик во времени

Для анализа нестационарных рядов применяется два вида преобразований: Фурье-преобразование и вейвлет-преобразование.

Фурье-преобразование в нестационарном случае имеет вид

$$S_x(\omega, t_1) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} e^{-i\omega t} x(t) dt \quad (4.13)$$

Здесь t_1 - текущее время, T - длина интервала, на котором строится спектр. Графическое представление функции $S(\omega, t_1)$ называется спектрограммой. Спектрограмма может представляться различными способами, например, с помощью трехмерного спектра Рисунок 4.10 или с цветным изображением градаций уровней спектра – рисунок 4.11.

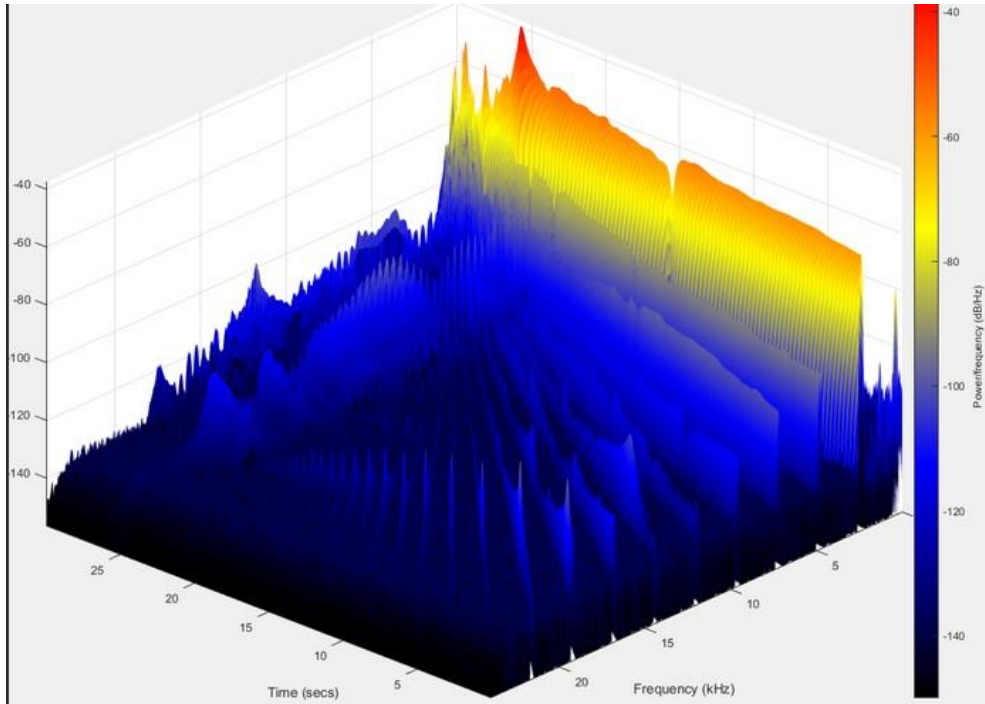


Рисунок 4.10. Представление спектрограммы в форме трехмерной поверхности.

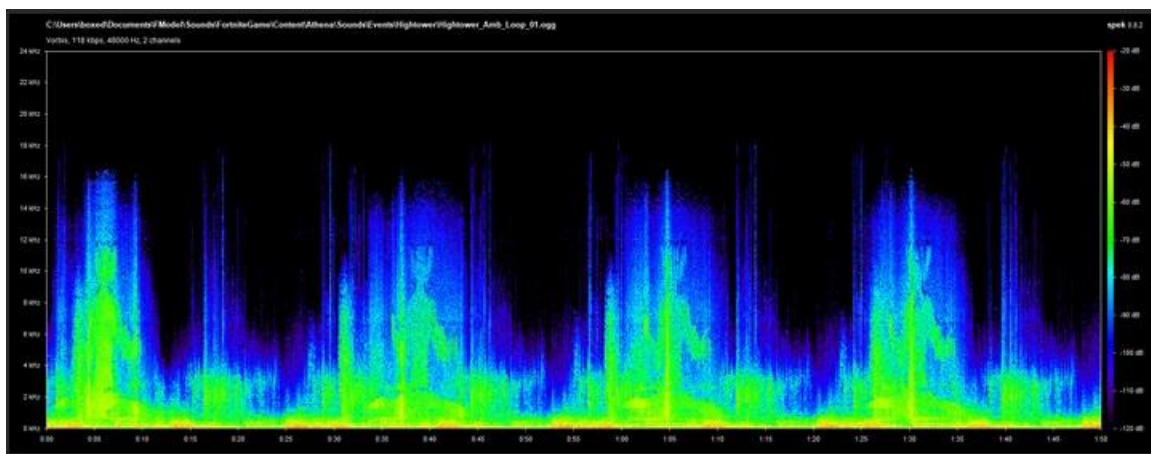
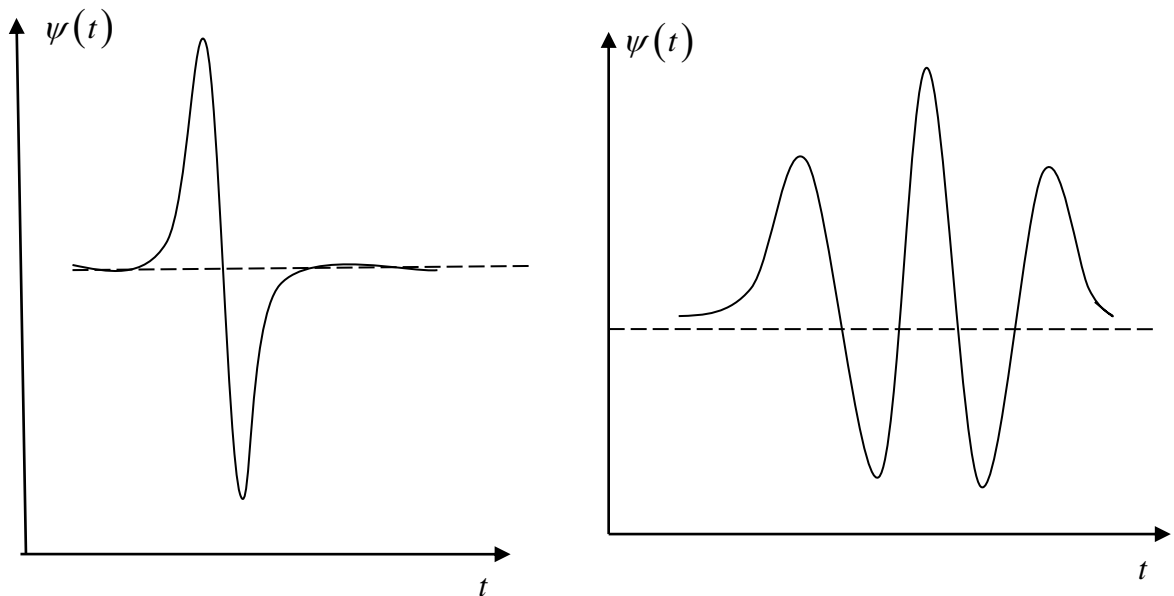


Рисунок 4.11. Представление спектрограммы с градацией уровней спектров различными цветами.

Вейвлет- преобразование имеет вид

$$W(a,b) = \int_0^T x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Здесь $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ - вейвлет- функция, b - параметр, определяющий временной сдвиг, a - параметр, эквивалентный частоте преобразования – параметр растяжения.



Рисунок

Существуют разные типы вейвлет функций, некоторые из них показаны на рисунке 4.12. Графически результаты вейвлет преобразования изображают в виде проекции на плоскость параметров (a,b) экстремумов $W(a,b)$ или с градацией уровней функции $W(a,b)$ различными цветами – рисунок 4.13.

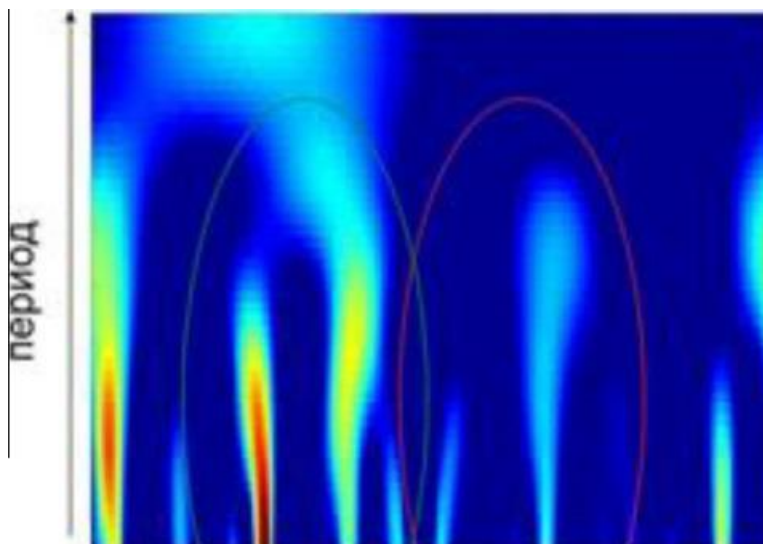


Рисунок 4.13. Представление спектрограммы с градацией уровней спектров различными цветами.

Отметим, что преобразование Фурье и вейвлет преобразование лежат в основе алгоритмов сжатия JPEG.

5. Лабораторные работы по курсу.

Электронный вариант лабораторных работ и необходимые программы находятся на dump.vstu.ru, в разделе «Высшая математика».

Лабораторная работа 1

Получение и построение графиков экспериментальных временных реализаций и гистограмм их распределения

1. Получить временные реализации углов поворотов приводов звеньев робота андроида путем прогона с заданным файлом программного движения. В качестве программного движения использовать файл DRIVEMAG.TXT.

Переименовать файлы углов приводов в UDRIVES.TXT а файлы величин токов в приводах в IDRIVES.TXT.

1. Установить ФРУНД на компьютере:

- скопировать директорию UTILF в корневую директорию диска C: (Если дистрибутив представлен в виде архива, то предварительно распаковать этот архив);

- создать ярлык программы на рабочем столе – файл fshellxp.exe из директории <C:\UTILF>

Распаковать просмотрщик графиков iFrund, создать ярлык на рабочем столе.

Распаковать модель в отдельных директориях — архив experim.

3. Построение графиков полученных временных реализаций рассматриваемых процессов и манипуляции ними.

3.1 Построение графика временной реализации непосредственно из файла результатов эксперимента.

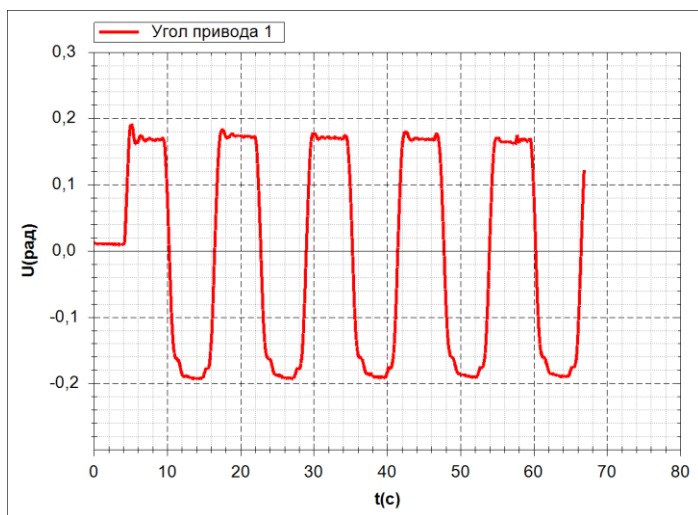


Рисунок 1.

Запустить оболочку визуализации графиков ifrund.exe.

Открыть файл с экспериментальными реализациями углов приводов UDRIVE.TXT. Визуализировать график для своего варианта привода — номер привода равен порядковому номеру в списке группы.

Отредактировать название кривой графика и имена осей как показано на рис. 1. Занести график в отчет.

Открыть файл с экспериментальными реализациями величин электрического тока в приводах — файл IDRIVE.TXT. Визуализировать график для своего варианта привода — номер привода равен порядковому номеру в списке группы.

Отредактировать название кривой графика и имена осей как показано на рис. 2. Занести график в отчет.



Рисунок 2.

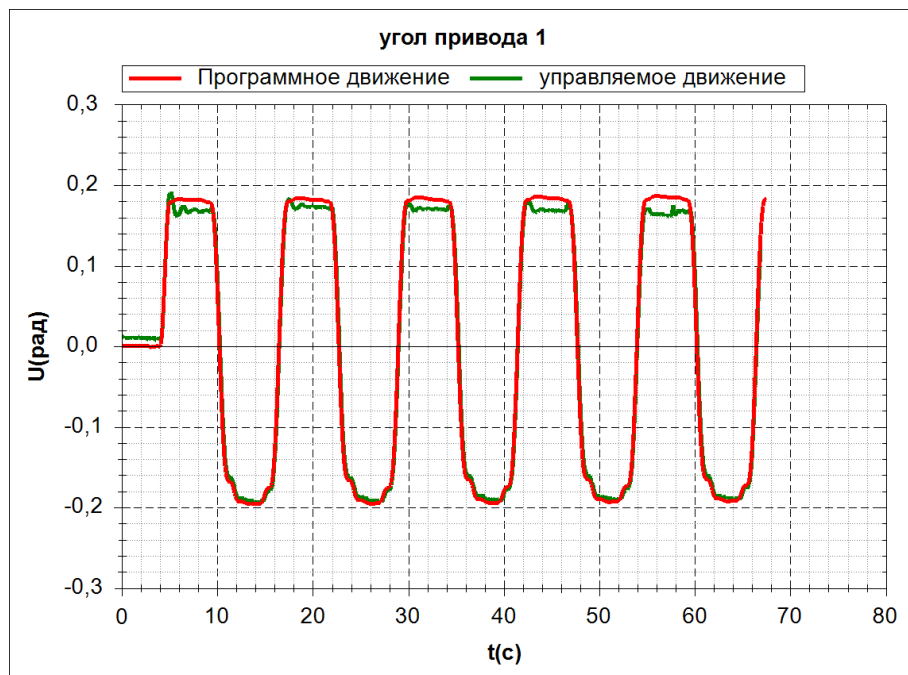


Рисунок 3.

3.2 Определение погрешности исполнения программных углов приводов и их измерения.

Открыть файлы с программными значениями углов приводов и измеренными — файлы DRIVEMGG.TXT и UDRIVE.TXT соответственно.

Наложить оба графика на одну сетку, отредактировать надписи и занести в отчет — рис. 3.

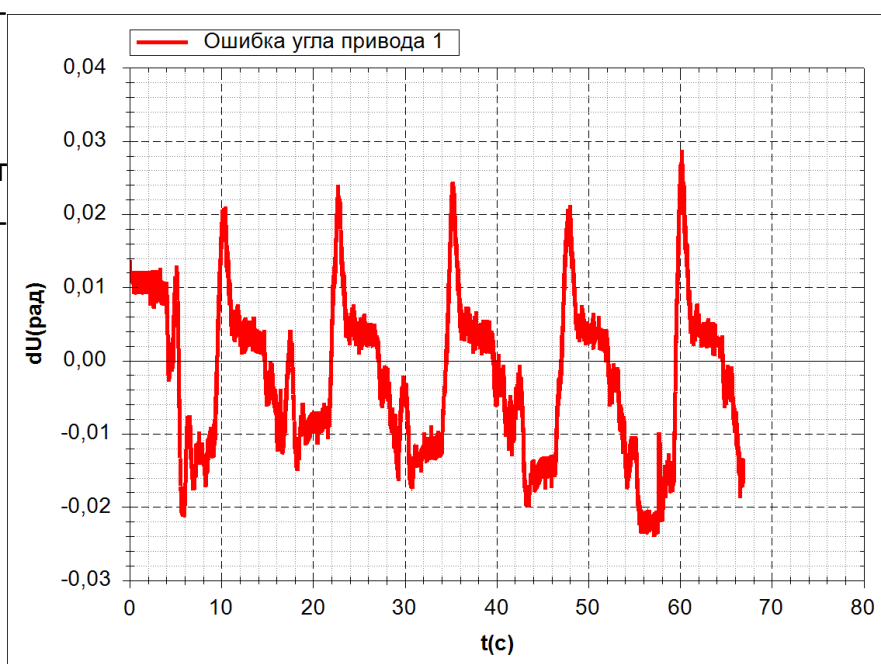
Вычесть кривую графика управляемого движения из программного движе-

ния, ре-
зультат
занести
в отчет
— ри-

сунк 4.

Ри-
сунк 4.

4.



Постро-

ение гистограммы распределения экспериментальной реализации.

Запустить оболочку ФРУНДа fshellxp. Открыть модель experim.frm.

Показать точку замера experiment – настройки/показывать точки замеров/experiment/Принять.

Выбрать файл для обработки — кликнуть на маркер контрольной точки/ свойства внешней реализации/ выбрать — указать файл UDRIVE.TXT.

Указать номер обрабатываемого канала — по номеру варианта. Выйти из формы описания свойств внешней реализации = принять.

Выбрать вид обработки — гистограммы распределения процессов.

Выйти из описания контрольной точки — Принять.

Выполнить анализ и вывод реализации — правая кнопка мыши на маркере контрольной точки/ обработать.

Открыть файл результатов обработки `benafin.bnf` программой `ifrund`. Отредактировать надписи графика, занести в отчет — рис. 5.



Рисунок 5.

Лабораторная работа 2

Построение автоспектров дискретных функций и исследование их характеристик

1. Установить ФРУНД на компьютере:

- скопировать директорию UTILF в корневую директорию диска C: (Если дистрибутив представлен в виде архива, то предварительно распаковать этот архив);
- создать ярлык программы на рабочем столе – файл fshellxp.exe из директории [C:\UTILF](#)

Распаковать просмотрщик графиков iFrund, создать ярлык на рабочем столе.

Распаковать модель в отдельных директориях — архив sinus2.

2. Построение автоспектра двухчастотного периодического процесса с помощью преобразования Фурье.

Запустить оболочку — fshellxp.exe;

Открыть модель sinus2.frm (каталог ..\sinus). Меню файл / открыть;

Скорректировать параметры модели в соответствии со своим вариантом — приложение 1. Меню правка / заголовок / файл;

Используемые системные переменные:

F1 – циклическая частота первой гармоники;

F2 – циклическая частота второй гармоники;

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели.

Для определения шага дискретизации процесса и частотного диапазона спектра используются формулы:

$$f_{\min} = \frac{1}{hN}, \quad (1)$$

$$f_{\max} = \frac{1}{h * 2.56}, \quad (2)$$

$$\Delta f_{\min} = f_{\min}, \quad (3)$$

Здесь f_{\min} - минимальная частота получаемого спектра, f_{\max} - максимальная частота получаемого спектра, Δf - разрешение получаемого спектра по частоте, h – шаг дискретизации реализации, N – число точек блока БПФ (быстрого преобразования Фурье). Поскольку преобразование Фурье на конечном интервале является фильтром с неузкополосной частотной характеристикой, то вид получаемого спектра зависит от соотношения между частотой процесса и ближайшей абсциссой дискретного спектра. Наилучший результат получается, если частота процесса кратна абсциссе дискретного спектра, т.е. шаг дискретизации удовлетворяет выражению

$$h = \frac{k}{f * N}, \quad (4)$$

Где k – номер точки абсциссы дискретного спектра, которая соответствует частоте процесса f . Значение k целесообразно выбирать так, чтобы пик спектра находился примерно в центре дискретного спектра, т.е. $k \sim 0.5N$.

Наихудший результат получается, если частота процесса лежит посередине абсциссы дискретного спектра, т.е. шаг дискретизации удовлетворяет выражению

$$h = \frac{k + 0.5}{f * N} . \quad (5)$$

2.1 Построение графика временной реализации двухчастотного процесса.

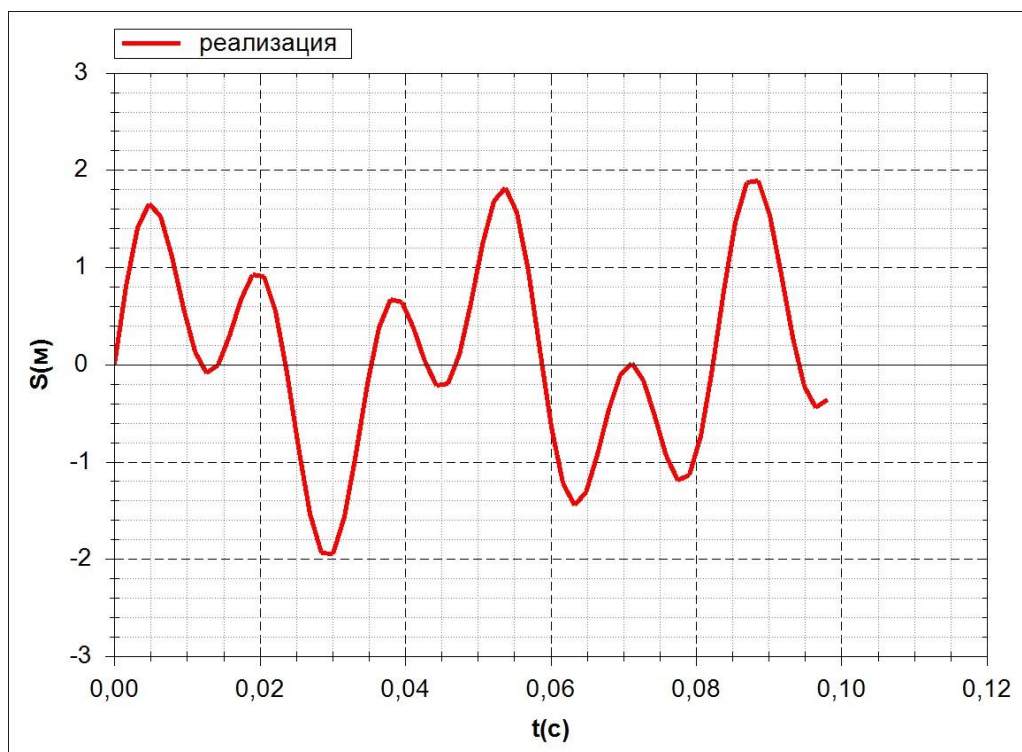


Рисунок 1.

Решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений;
— вариант параметров решения sinus.

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - sinus.

Просмотреть график временной реализации и занести его в отчет — рис 1.

2.2 Построение спектра двухчастотного процесса для случаев наилучшего и наихудшего шага дискретизации.

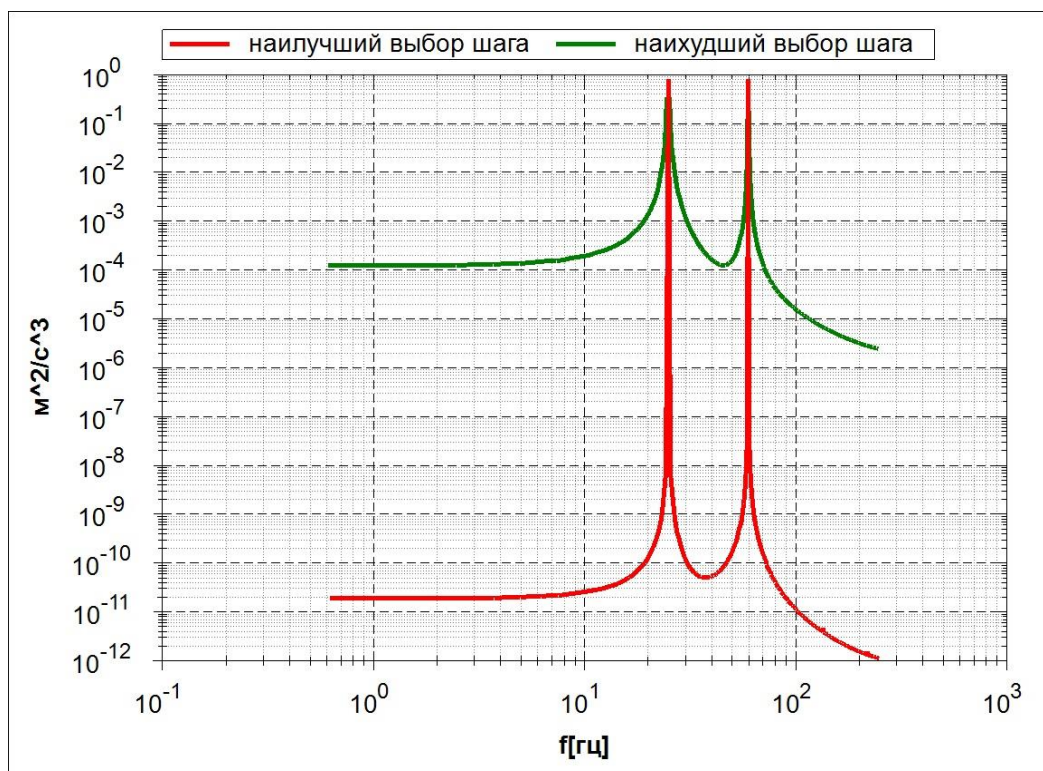


Рисунок 2.

Вычислить наилучший шаг дискретизации по формуле (4). Решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений; — вариант параметров решения *spectr*. Перед решением модели занести вычисленный шаг дискретизации в управляющие параметры — вариант управляющих параметров *sinus_best*. Корректируются две величины — шаг интегрирования и шаг записи результатов интегрирования.

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - *spectr*. Перед обработкой выставить в параметрах обработки тип окна «прямоугольное», длина блока БПФ - 1024 - Меню настройки / показывать точки замеров/*spectr*, далее кликнуть мышку на маркере контрольной точке (зеленый прямоугольник).

Переименовать полученный график спектра.

Вычислить наихудший шаг дискретизации по формуле (5). Решить модель и обработать результаты аналогично как в случае наилучшего шага дискретизации. Построить совмещенные графики спектров для наилучшего и наихудшего случаев и сохранить в отчете – рис. 2.

2.3 Анализ влияния длины блока БПФ на спектр.

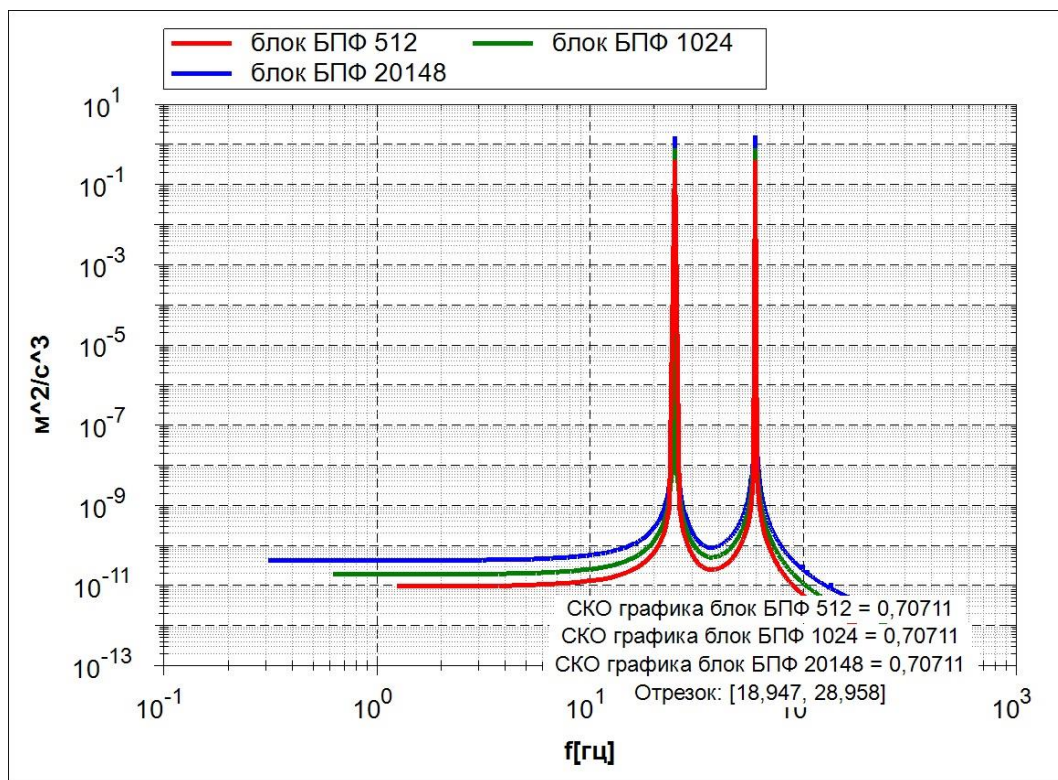


Рисунок 3.

Для наилучшего шага дискретизации решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений. Вариант параметров решения spectr.

Обработать результаты решения, получить спектры — кнопка обработка результатов, группа вывода - spectr. Обработку выполнить три раза для значений длины блока БПФ 512, 1024, 2048

- меню настройки / показывать точки замеров/ spectr. Перед обработкой выставить в параметрах обработки тип окна «прямоугольное». Переименовать полученные графики спектра и построить объединенный сравнительный график – рис. 3.

2.4 Анализ влияния типа временного окна БПФ на спектр.

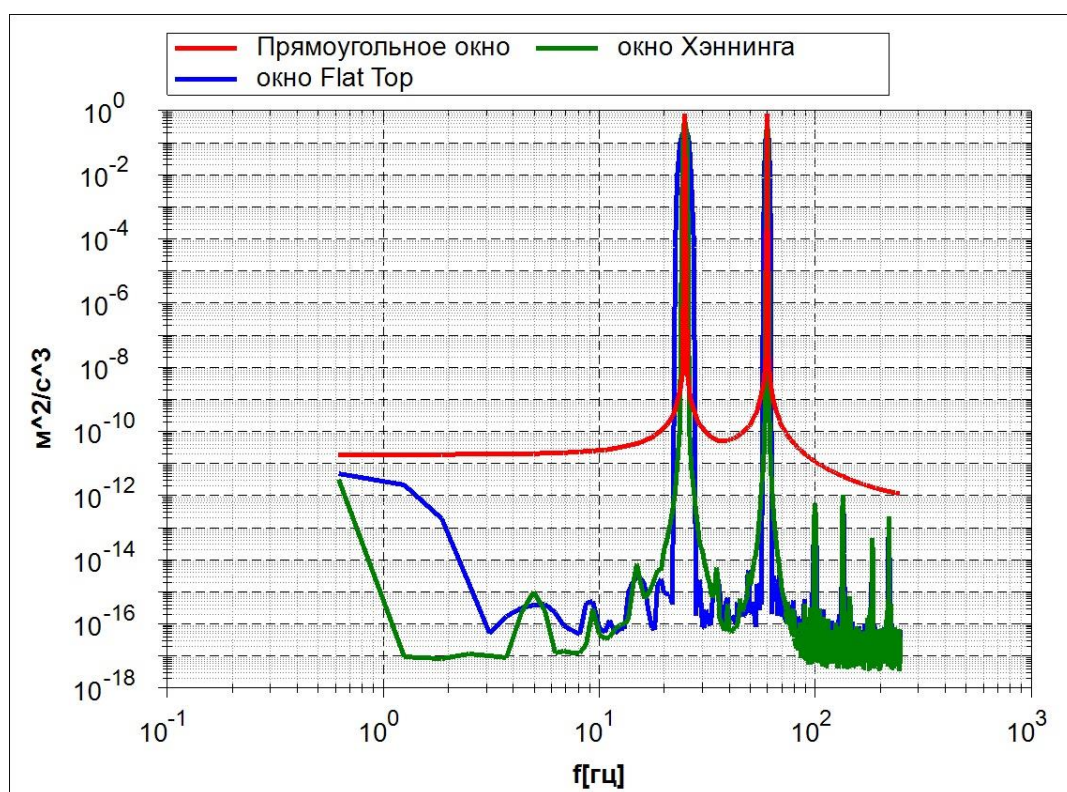


Рисунок 4.

Для наилучшего шага дискретизации решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений; — вариант параметров решения spectr.

Обработать результаты решения, получить спектры — кнопка обработка результатов, группа вывода - spectr. Обработку выполнить три раза для разных значений типа окна - меню

настройки / показывать точки замеров/ spectr. Перед обработкой выставить в параметрах обработки тип окна «прямоугольное», Хэннинга, Flat Top. Переименовать полученные графики спектров и построить объединенный сравнительный график – рис. 4.

2.5 Анализ влияния амплитуды периодического сигнала на автоспектр.

Скорректировать амплитуды гармоник периодического сигнала. Меню правка / заголовок / файл.

Увеличить в два раза амплитуду первой гармоники – переменная AM1, уменьшить в два раза амплитуду второй гармоники – переменная AM2.

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели.

Для наилучшего шага дискретизации решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений; — вариант параметров решения spectr.

Обработать результаты решения, получить спектры — кнопка обработка результатов, группа вывода - spectr. Перед обработкой выставить в параметрах обработки тип окна «прямоугольное». Переименовать полученные графики спектров и построить объединенный сравнительный график – рис. 5.

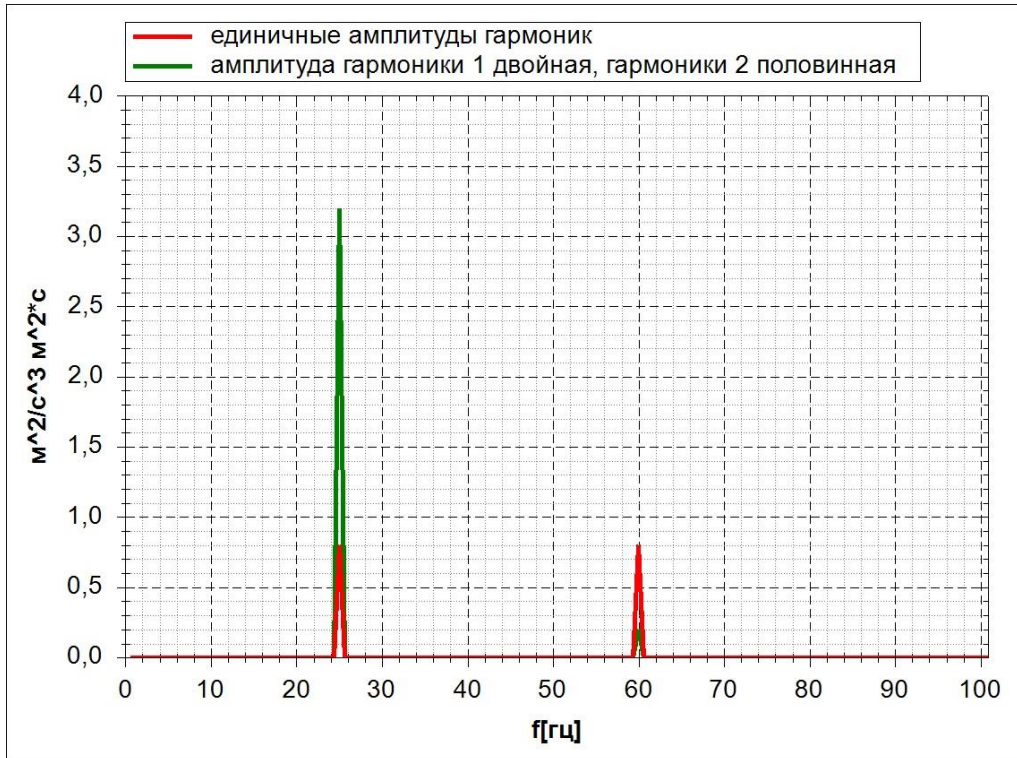


Рисунок 5.

3. Построение автоспектра экспериментальной реализации зашумленного детерминированного процесса помощью преобразования Фурье.

Запустить оболочку — `fshellxp.exe`;

Открыть модель `experim.frm` (каталог `..\experim`). Меню файл / открыть;

Скорректировать параметры модели в соответствии со своим вариантом — приложение 2. Меню правка / заголовок / файл;

Используемые системные переменные:

КК — количество каналов в файле с экспериментальной реализацией;

KN – номер канала, данные которого подлежат обработке.

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели.

(5)

3.1 Построение графика временной реализации заданного канала.

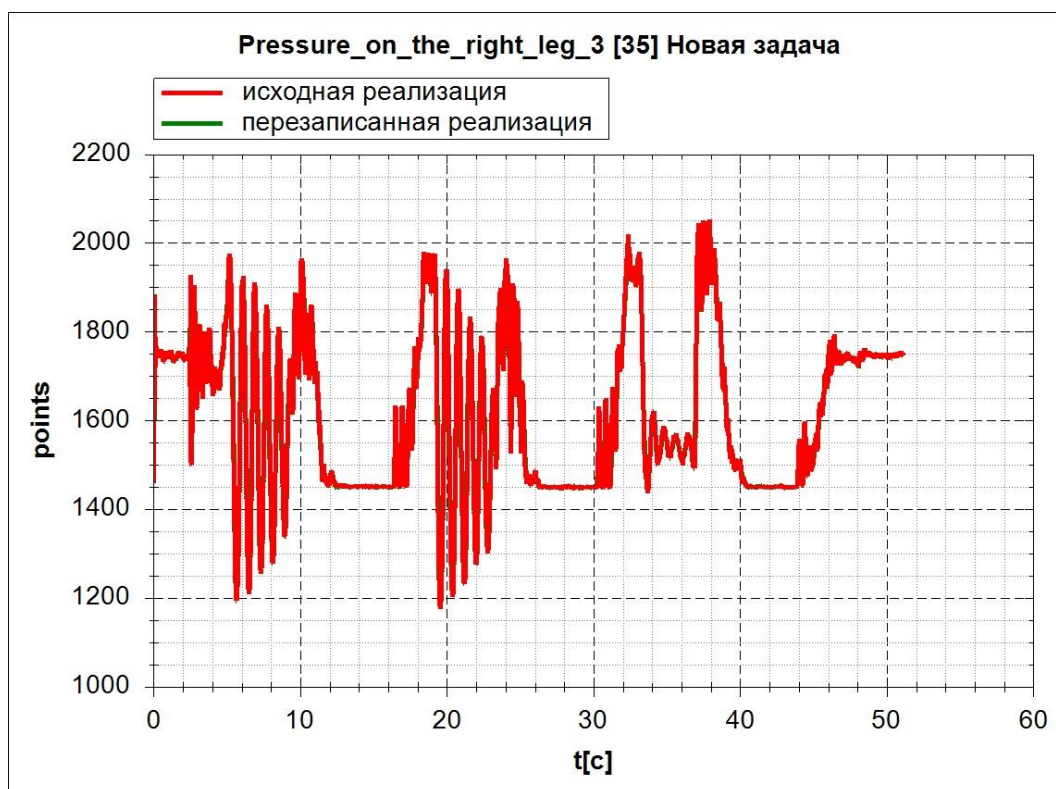


Рисунок 6.

Решить модель. Меню решение / интегрирование уравнений; — вариант параметров решения expdata. В управляющих параметрах поставить шаг интегрирования и записи результатов 0.01 с

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - expdata.

Просмотреть график временной реализации и переименовать файл. Просмотреть график временной реализации непосредственно из файла экспериментальных данных с помощью программы ifrund, совместить его с полученным ранее и убедиться, что кривые идентичны. График с совмещенными кривыми занести в отчет – рис. 6.

3.2 Построение спектра временной реализации заданного канала.

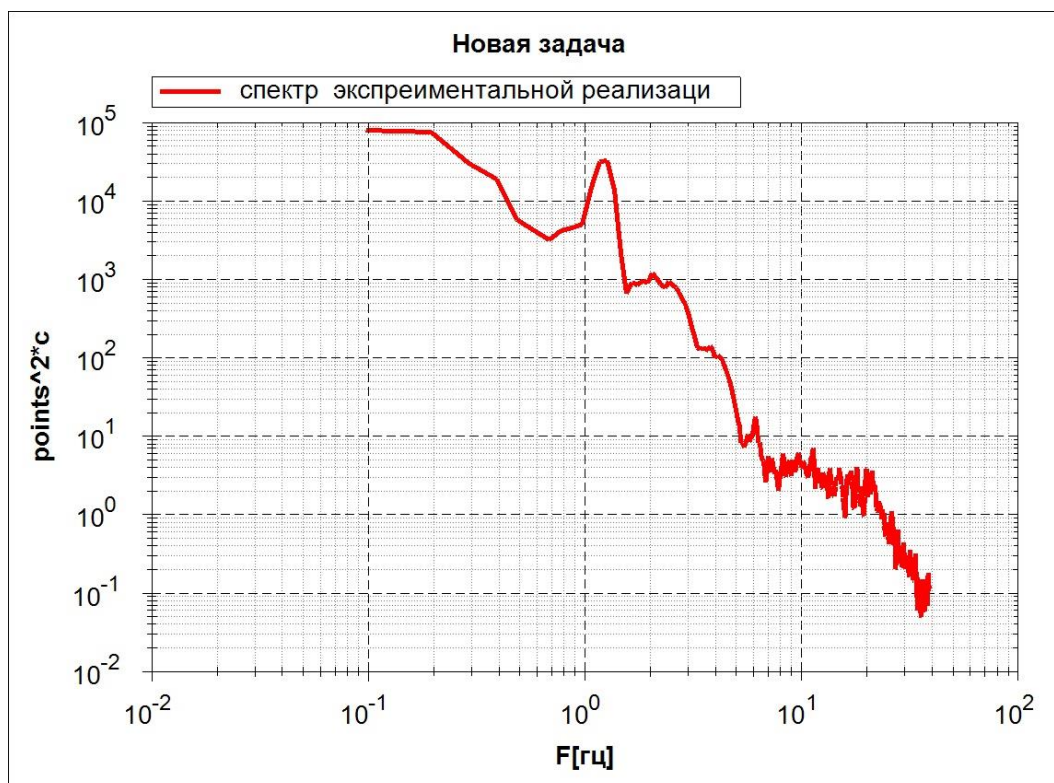


Рисунок 7.

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - expdata. Перед обработкой выставить в параметрах обработки вид обработки «Спектральная плотность», тип окна «Хэннинга», длина блока БПФ - 1024 - Меню настройки / показывать точки замеров/ expdata, далее кликнуть мышку на маркере контрольной точке (зеленый прямоугольник).

Переименовать полученный график спектра и сохранить в отчете — рис. 7.

4. Построение автоспектра экспериментальной реализации, полученной на лабораторной работе 1 — реализации углов приводов робота андроида.

4.1. Повторить п.п. 3.2 лабораторной работы с помощью задания контрольной точки обработки экспериментальной информации — п.п. 4 лабораторной работы 1. Вариант кривой брать как в лабораторной работе 1. В описании контрольной точки в качестве вида обработки задать автоспектр. Построенный спектр привеси в отчет, аналогично рис. 7.

Приложение 1. Варианты частот процессов

1. $f_1 = 27; f_2 = 45;$

2. $f_1 = 37; f_2 = 41;$

3. $f_1 = 47; f_2 = 35;$

4. $f_1 = 21; f_2 = 47;$

5. $f_1 = 33; f_2 = 43;$

6. $f_1 = 47; f_2 = 69;$

7. $f_1 = 39; f_2 = 22;$

8. $f_1 = 52; f_2 = 24;$

9. $f_1 = 38; f_2 = 55;$

10. $f_1 = 19; f_2 = 45;$

Приложение 2. Варианты номеров каналов экспериментальных данных.

Экспериментальные данные содержатся в файле record_19_04_2018_17_01_37.txt (эксперимент с роботом андроидом)

1. KN=22;
2. KN=23;
3. KN=24;
4. KN=25;
5. KN=26;
6. KN=27;
7. KN=28;
8. KN=30;
9. KN=31;
10. KN=32;

Лабораторная работа 3

Построение взаимных характеристик двух процессов

1. Установить ФРУНД на компьютере (если ФРУНД установлен то заменить в UTILF файл fshellxp.exe на приложенный к лабораторной работе 3):
 - скопировать директорию UTILF в корневую директорию диска C: (Если дистрибутив представлен в виде архива, то предварительно распаковать этот архив);
 - создать ярлык программы на рабочем столе – файл fshellxp.exe из директории [C:\UTILF](#)

Распаковать просмотрщик графиков iFrund, создать ярлык на рабочем столе.

Распаковать модель в отдельной директории — архив experim.

2. Построение графиков временных реализаций двух процессов.

В качестве исходных данных использовать файл 6560rb60_1_t15_76.txt, который содержит результаты экспериментальных замеров параметров ускорений точек конструкции автомобиля при движении по ровному булыжнику.

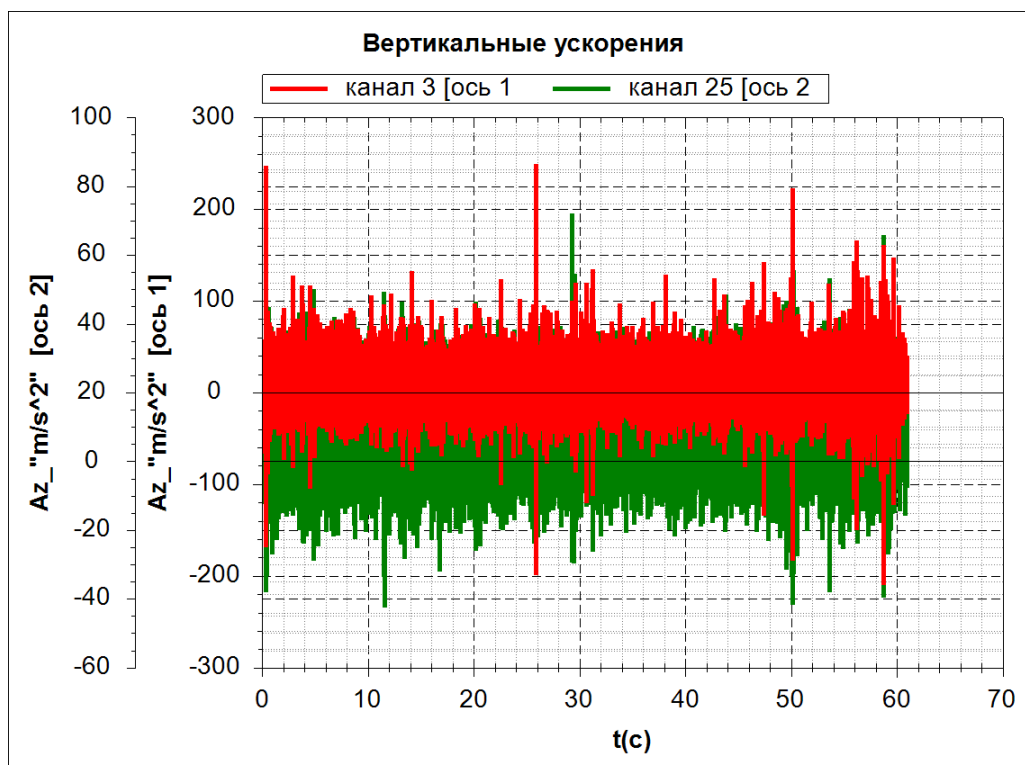


Рисунок 1.

Запустить оболочку визуализации графиков ifrund.exe.

Открыть файл с экспериментальными реализациями углов приводов 6560rb60_1_t15_76.txt. Визуализировать графики двух реализаций для своего варианта — номера каналов для вариантов указаны в приложении.

Отредактировать название кривых графиков и имена осей как показано на рис. 1. Из-за большого количества точек реализации, на графике может быть видна только одна кривая, поэтому, при необходимости, можно включить режим отдельного масштабирования каждой кривой — нажать клавишу 4. Занести график в отчет — рис. 1.

3. Построение графиков автоспектров двух анализируемых реализаций.

Запустить оболочку ФРУНДа fshellxp. Открыть модель `experim.frm`. Показать точку замера `experiment` – настройки/показывать точки замеров/`experiment/Принять`.

Выбрать файл для обработки — кликнуть на маркер контрольной точки/ свойства внешней реализации/ выбрать — указать файл `6560rb60_1_t15_76.txt`.

Указать номер обрабатываемого канала 1 из своего варианта. Выйти из формы описания свойств внешней реализации - принять.

Выбрать вид обработки — автоспектры .

Выйти из описания контрольной точки — Принять.

Выполнить анализ и вывод реализации — правая кнопка мыши на маркере контрольной точки/ обработать.

Открыть файл результатов обработки `benafin.bnf` программой `ifrund`. Отредактировать надписи графика, сохранить график в файле с другим именем — Сохранить (S) («Кнопка Меню»)/ имя файла (например `1.bnf`)/ Сохранить.

Аналогично задать в контрольной точке `experiment` номер канала 2 из своего варианта и построить спектр реализации по каналу 2.

Открыть файл результатов обработки `benafin.bnf` программой `ifrund` отредактировать надписи графика. Совместить графики спектров по обоим каналам на одном графике и занести в отчет — рис. 2.

По графикам спектров определить резонансные частоты — для спектров рис. 2 это 9, 45 и 800 Гц для канала 3 и 2, 5 и 400 Гц для канала 25. Графики спектров визуализировать в логарифмическом масштабе (горячая клавиша G). Для корректного отображения логарифмического масштаба, должна строиться одна сетка — клавиша 1.



Рисунок 2.

4. Построение функции когерентности двух заданных реализаций.

Запустить оболочку ФРУНДа `fshellxp`. Открыть модель `experim.frm`. Показать точку замера «функция когерентности» – настройки/показывать точки замеров/«функция когерентности»/Принять.

Выбрать файл для обработки — кликнуть на маркер контрольной точки/ свойства внешней реализации/ выбрать — указать файл `6560rb60_1_t15_76.txt`.

Указать номер обрабатываемого канала 1 из своего варианта. Выйти из формы описания свойств внешней реализации — принять.

Указать номер обрабатываемого канала 2 из своего варианта — вторая точка/ свойства внешней реализации/ номер канала / принять / принять.

Выйти из описания контрольной точки — Принять.

Выполнить анализ и вывод реализации — правая кнопка мыши на маркере контрольной точки/ обработать.

Открыть файл результатов обработки `benafin.bnf` программой `ifrund`. Отредактировать надписи графика, сохранить график в файле с другим именем — Сохранить (S) («Кнопка Меню»)/ имя файла (например `3.bnf`)/ Сохранить.

Открыть файл результатов обработки `benafin.bnf` программой `ifrund` отредактировать надписи графика и занести в отчет — рис. 3. При визуализации целесообразно использовать линейный масштаб по оси Y и логарифмический по X – кнопка масштаб на панели инструментов.

По графику функции когерентности определить частоты с высокой корреляцией сигналов каналов. Для рис. 3 это 1, 7 Гц. Для остальных пиков значение коэффициента корреляции менее 0.6.

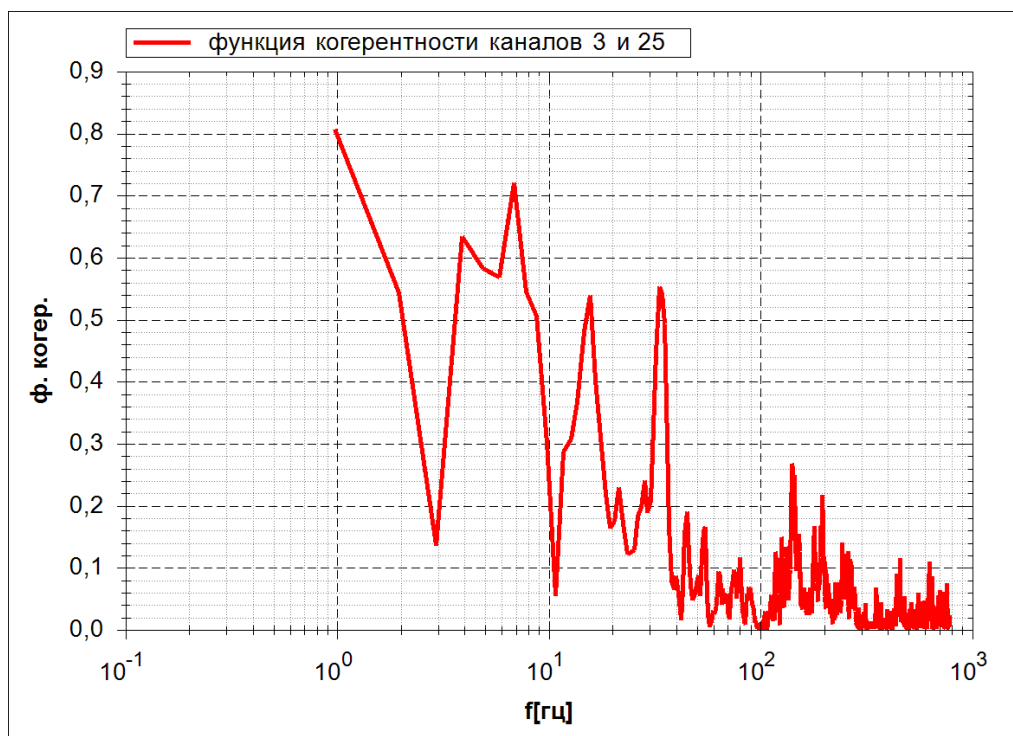


Рисунок 3.

4. Построение фазовой характеристики двух заданных реализаций (ФЧХ — Фазо — Частотной Характеристики).

Запустить оболочку ФРУНДа fshellxp. Открыть модель experim.frm. Показать точку замера «фазовая характеристика» – настройки/показывать точки замеров/«фазовая характеристика»/Принять.

Выбрать файл для обработки — кликнуть на маркер контрольной точки/ свойства внешней реализации/ выбрать — указать файл 6560rb60_1_t15_76.txt.

Указать номер обрабатываемого канала 1 из своего варианта. Выйти из формы описания свойств внешней реализации — принять.

Указать номер обрабатываемого канала 2 из своего варианта — вторая точка/ свойства внешней реализации/ номер канала / принять / принять.

Выйти из описания контрольной точки — Принять.

Выполнить анализ и вывод реализации — правая кнопка мыши на маркере контрольной точки/ обработать.

Открыть файл результатов обработки benafin.bnf программой ifrund. Отредактировать надписи графика, сохранить график в файле с другим именем — Сохранить (S) («Кнопка Меню»)/ имя файла (например 4.bnf)/ Сохранить.

Открыть файл результатов обработки benafin.bnf программой ifrund отредактировать надписи графика и занести в отчет — рис. 4.

По графику фазовой характеристики определить фазы на частотах с высокой корреляцией сигналов каналов. Для рис. 4 это 0.6 рад для частоты 1 Гц и 1 рад для 7 Гц. Д

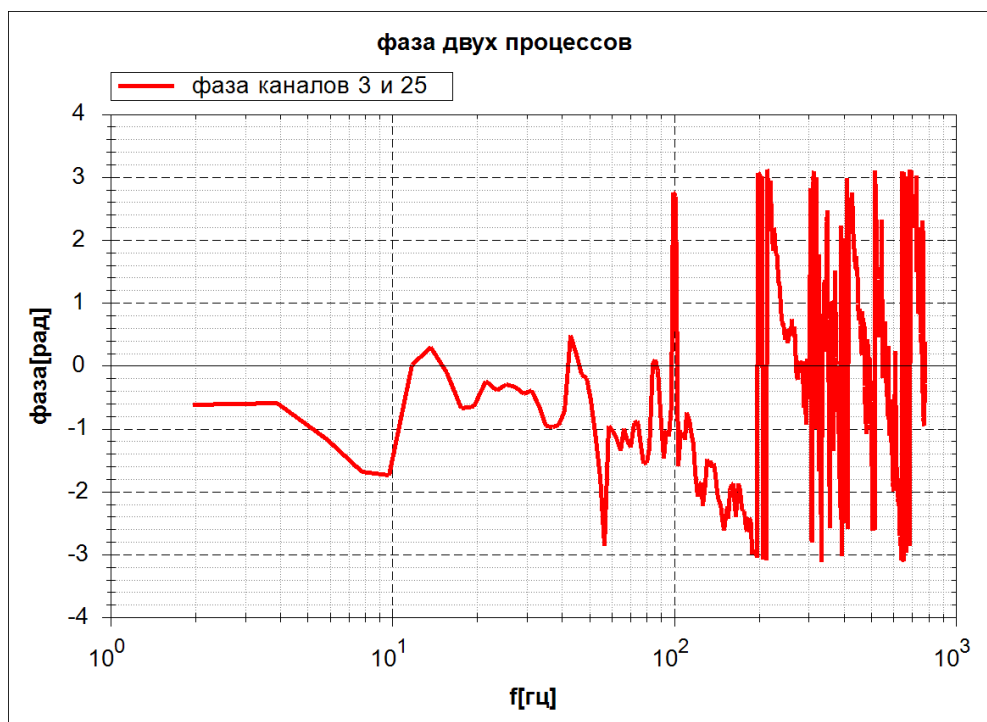


Рисунок 4

5. Построение передаточной функции между двумя процессами (АЧХ — Амплитудно — Частотной Характеристики).

Запустить оболочку ФРУНДа `fshellxp`. Открыть модель `experim.frm`. Показать точку замера «передаточная функция» — настройки/показывать точки замеров/«передаточная функция»/Принять.

Выбрать файл для обработки — кликнуть на маркер контрольной точки/ свойства внешней реализации/ выбрать — указать файл `6560rb60_1_t15_76.txt`.

Указать номер обрабатываемого канала 1 из своего варианта. Выйти из формы описания свойств внешней реализации — принять.

Указать номер обрабатываемого канала 2 из своего варианта — вторая точка/ свойства внешней реализации/ номер канала / принять / принять.

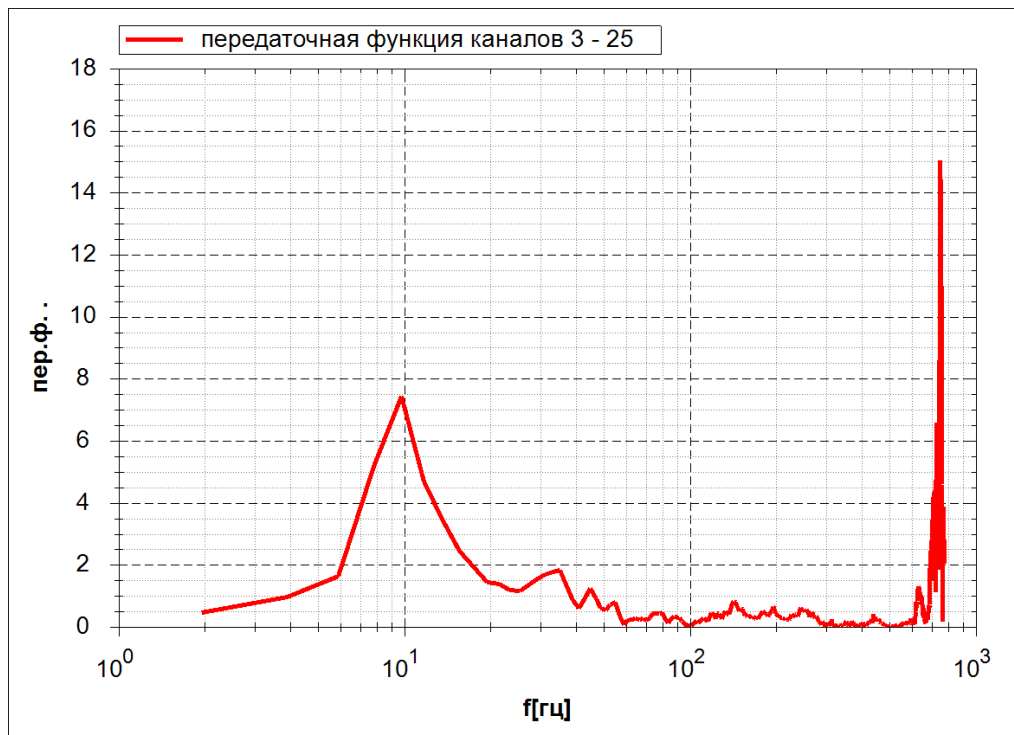
Выйти из описания контрольной точки — Принять.

Выполнить анализ и вывод реализации — правая кнопка мыши на маркере контрольной точки/ обработать.

Открыть файл результатов обработки benafin.bnf программой ifrund. Отредактировать надписи графика, сохранить график в файле с другим именем — Сохранить (S) («Кнопка Меню»)/ имя файла (например 5.bnf)/ Сохранить.

Открыть файл результатов обработки benafin.bnf программой ifrund отредактировать надписи графика и занести в отчет — рис. 5.

По графику передаточной функции определить резонансные частоты.



Для рис. 5 это 0.6 рад для частоты 1 Гц и 1 рад для 7 Гц. Д

Рисунок 5.

Приложение. Варианты номеров каналов для совместного анализа.

Вариант канал1 канал2

1. 6, 26.
2. 9, 27.
3. 12, 28.
4. 15, 29.
5. 18, 30.
6. 21, 31.
7. 24, 32.
8. 3, 26.
9. 1, 25.
10. 4, 27.
11. 7, 28.
12. 10, 29.
13. 13, 30.
14. 16, 31.
15. 19, 32.
16. 22, 26.
17. 2, 25.
18. 5, 26.
19. 8, 27.
20. 11, 28.
21. 14, 29.
22. 17, 30.
23. 20, 31.

24. 23, 32

Лабораторная работа 4 (магистры 5 курс ИВТ)

1. Установить ФРУНД на компьютере:

- скопировать директорию UTILF в корневую директорию диска C: (Если дистрибутив представлен в виде архива, то предварительно распаковать этот архив);

- создать ярлык программы на рабочем столе – файл fshellxp.exe из директории [C:\UTILF](#)

Распаковать просмотрщик графиков iFrund, создать ярлык на рабочем столе.

Распаковать модели в отдельных директориях — архивы rfunc, rfund, sinus.

2. Построение параметров передаточной функции непрерывной системы.

Запустить оболочку — fshellxp.exe;

Открыть модель rfunc.frm (каталог ..\rfunc). Меню файл / открыть;

Скорректировать параметры модели в соответствии со своим вариантом — приложение 1. Меню правка / заголовок / файл;

Используемые системные переменные:

OMEGA – круговая частота;

H – шаг дискретизации;

T – время.

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели;

Решить модель. Меню решение / генерация модели; — вариант параметров решения «непрерывная передаточная функция».

Используемые параметры для решения:

Число точек по частоте – первый параметр управляющей информации;

Начальная частота АЧХ – второй параметр управляющей информации;

Шаг по частоте АЧХ – третий параметр управляющей информации;

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - «непрерывная передаточная функция».

Просмотреть графики модуля передаточной функции (модуля передаточной функции - амплитудно частотной характеристики и фазы - фазо частотной характеристики), скорректировать названия осей и занести в отчет – рис. 1 -2.

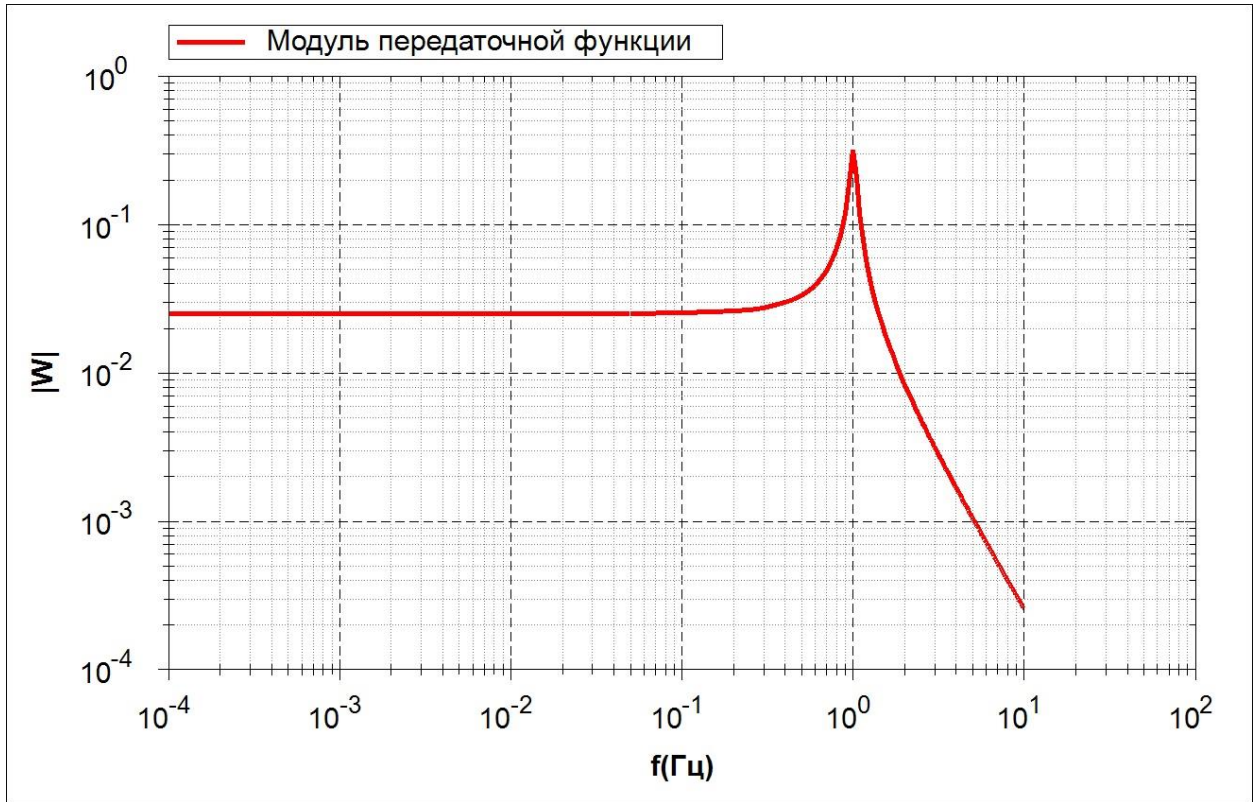


Рисунок 1.

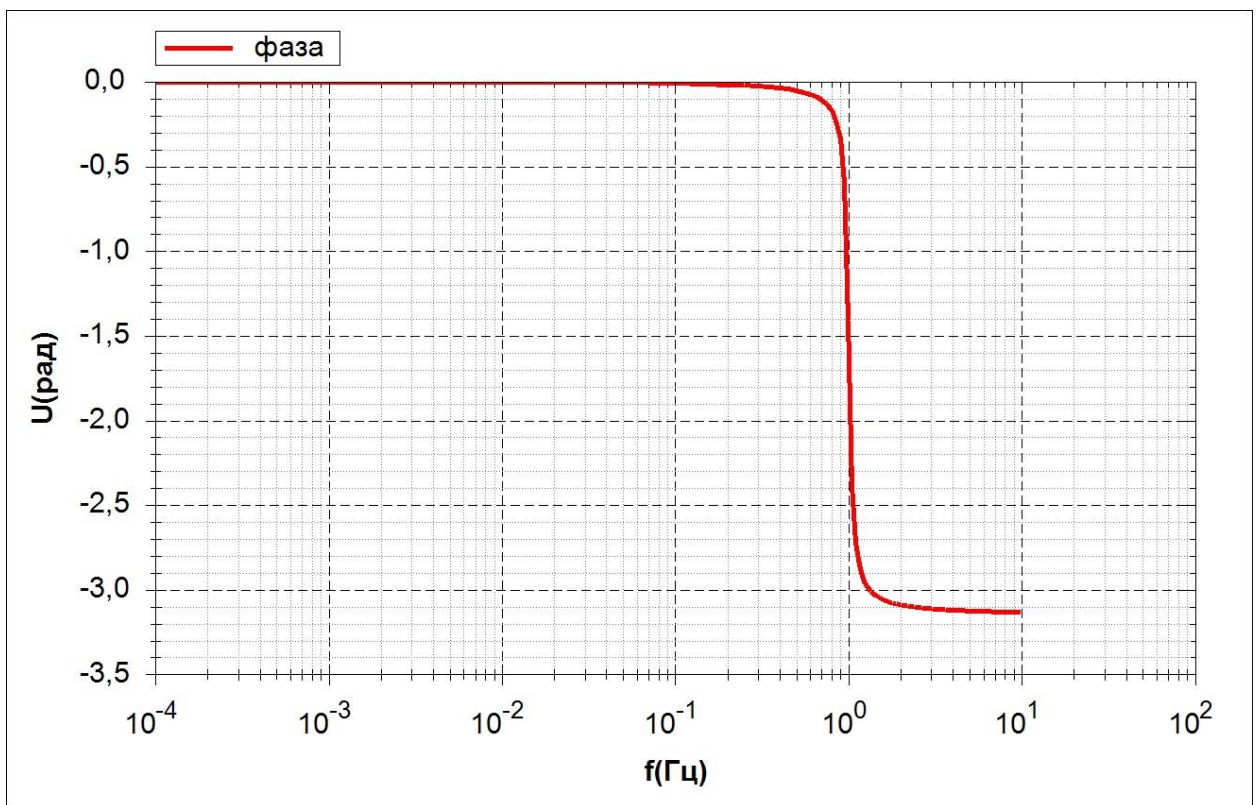


Рисунок 2.

3. Построение параметров передаточной функции дискретной системы.

Запустить оболочку — fshellxp.exe;

Открыть модель pfund.frm (каталог ..\pfund). Меню файл / открыть;

Скорректировать параметры модели в соответствии со своим вариантом — приложение 2. Меню правка / заголовок / файл;

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели;

Решить модель. Меню решение / генерация модели; — вариант параметров решения «непрерывная передаточная функция».

Используемые параметры для решения:

Шаг дискретизации – четвертый и пятый параметры управляющей информации (должны быть равны друг другу);

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - «непрерывная передаточная функция».

Просмотреть графики модуля передаточной функции (модуля передаточной функции - амплитудно частотной характеристики и фазы - фазо частотной характеристики), скорректировать названия осей и занести в отчет – рис. 3 -4.

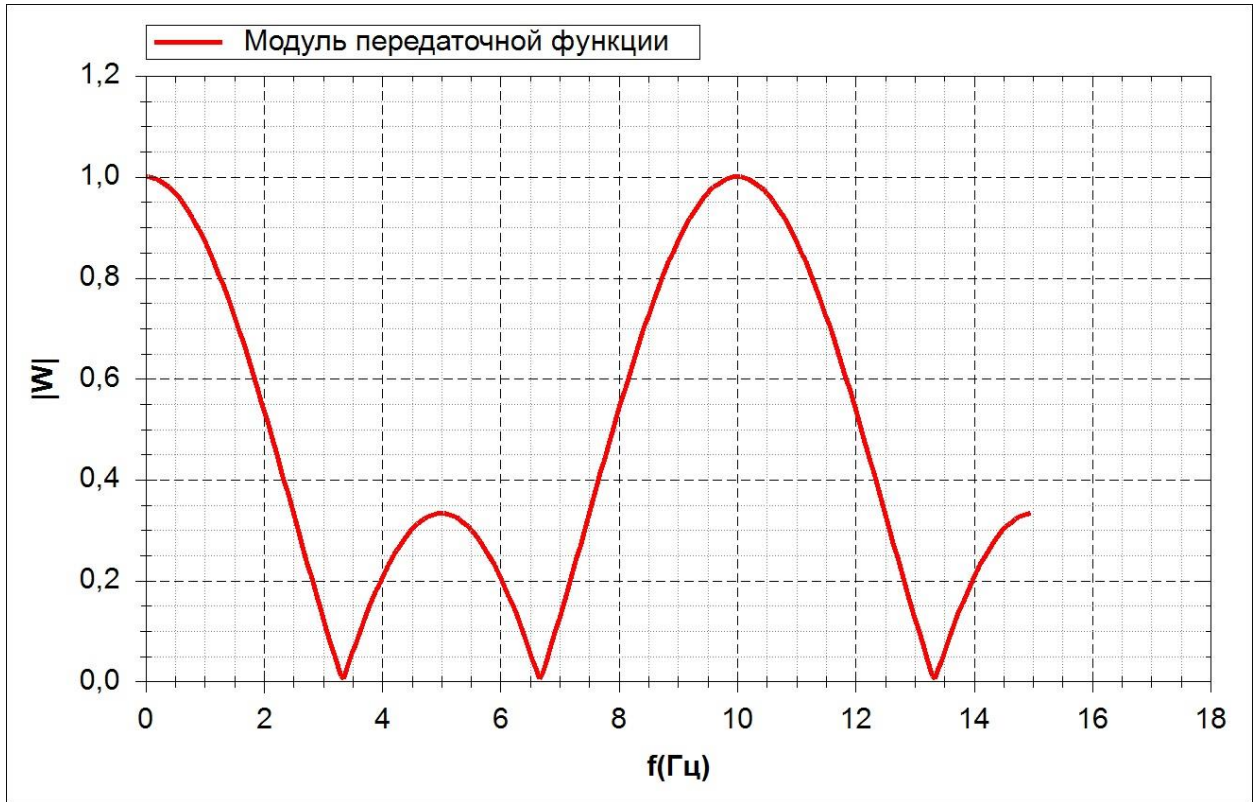


Рисунок 3.

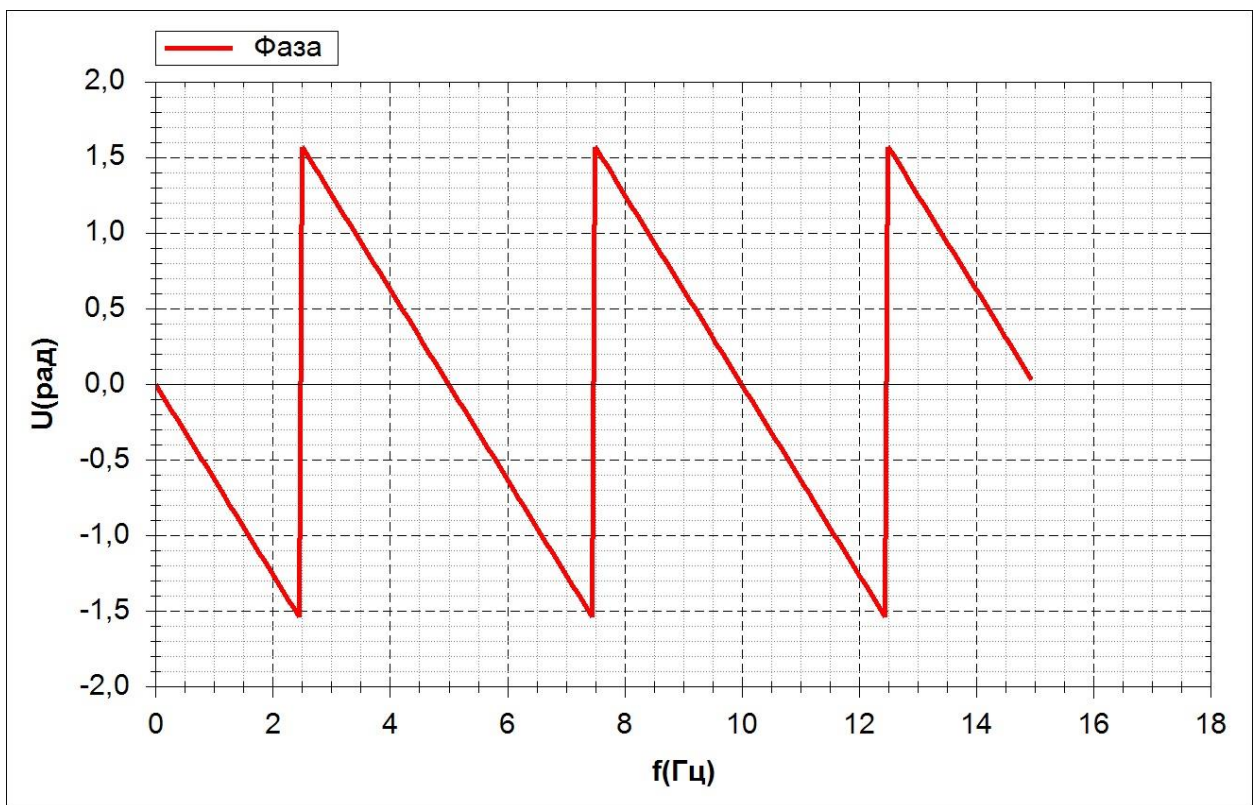


Рисунок 4.

4. Построение графика синусоидальной функции при прохождении трехточечного дискретного фильтра.

Запустить оболочку — fshellxp.exe;

Открыть модель sinus.frm (каталог ..\sinus). Меню файл / открыть;

Скорректировать параметры модели в соответствии со своим вариантом — приложение 3. Меню правка / заголовков / файл;

Сгенерировать модель. Меню решение / генерация модели;

Решить модель. Меню решение / генерация модели; — вариант параметров решения «sinus».

Используемые параметры для решения:

Шаг дискретизации – четвертый и пятый параметры управляющей информации (должны быть равны друг другу);

Длина процесса – седьмой параметр управляющей информации.

Обработать результаты решения — кнопка обработка результатов, группа вывода - «sinus».

Просмотреть графики исходной синусоиды и отфильтрованной, определить значение передаточной функции и фазы в точке частоты синусоиды, скорректировать названия осей и занести в отчет – рис. 5.

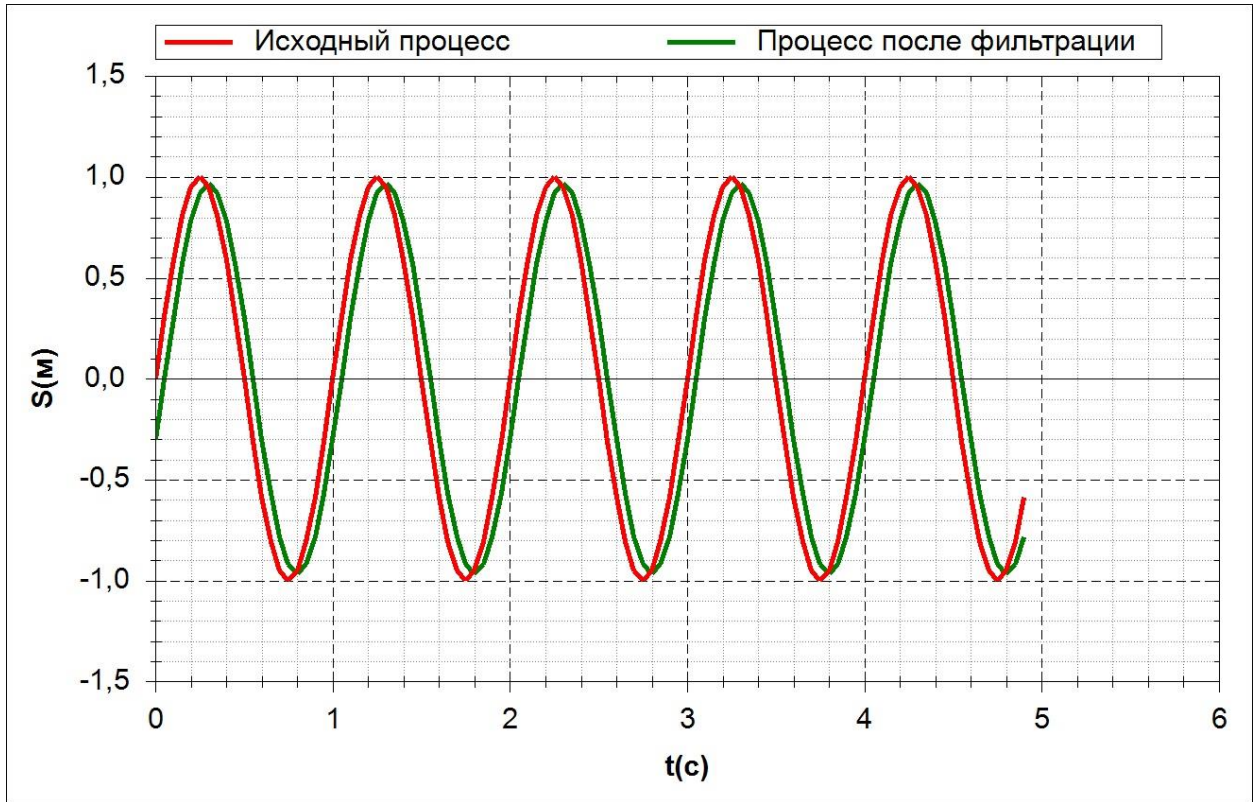


Рисунок 5.

Приложение 1. Варианты непрерывных передаточных функций

$$1. W(p) = \frac{1}{40 + 2p + p^2}$$

$$2. W(p) = \frac{1}{150 + 4p + p^2}$$

$$3. W(p) = \frac{1}{300 + 3p + p^2}$$

$$4. W(p) = \frac{1}{60 + 5p + p^2}$$

$$5. W(p) = \frac{1}{500 + 2p + p^2}$$

$$6. W(p) = \frac{1}{(40 + p^2)(90 + p^2)}$$

$$7. W(p) = \frac{1}{(80 + p^2)(190 + p^2)}$$

$$8. W(p) = \frac{1}{(120 + p^2)(30 + p^2)}$$

$$9. W(p) = \frac{1}{(50 + p^2)(390 + p^2)}$$

$$10. W(p) = \frac{1}{(200 + p^2)(600 + p^2)}$$

$$11. W(p) = \frac{1}{(350 + p^2)(440 + p^2)}$$

$$12. W(p) = \frac{1}{(100 + p^2)(800 + p^2)}$$

$$13. W(p) = \frac{1}{(300 + p^2)(900 + p^2)}$$

$$14. W(p) = \frac{1}{(900 + p^2)(300 + p^2)}$$

$$15. W(p) = \frac{1}{(1200 + p^2)(800 + p^2)}$$

Приложение 2. Варианты дискретных передаточных функций

$$1. W(p) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{3}, \text{ шаг дискретизации } 0.1.$$

$$2. W(p) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{4}, \text{ шаг дискретизации } 0.2.$$

3. $W(p) = \frac{1+z^{-1}+3z^{-2}}{5}$, шаг дискретизации 0.3.
4. $W(p) = \frac{1+z^{-1}+z^{-3}}{3}$, шаг дискретизации 0.05.
5. $W(p) = \frac{2+z^{-1}+z^{-2}}{4}$, шаг дискретизации 0.02.
6. $W(p) = \frac{1+3z^{-1}+z^{-2}}{5}$, шаг дискретизации 0.03.
7. $W(p) = \frac{1+2z^{-1}+2z^{-2}}{5}$, шаг дискретизации 0.06.
8. $W(p) = \frac{3+z^{-1}+z^{-2}}{5}$, шаг дискретизации 0.02.
9. $W(p) = \frac{2+z^{-1}+2z^{-2}}{5}$, шаг дискретизации 0.2.
10. $W(p) = \frac{1+z^{-1}+2z^{-3}}{4}$, шаг дискретизации 0.03.
11. $W(p) = \frac{1+2z^{-1}+3z^{-3}}{6}$, шаг дискретизации 0.25.
12. $W(p) = \frac{1+3z^{-1}+2z^{-3}}{6}$, шаг дискретизации 0.05.
13. $W(p) = \frac{2+z^{-1}+z^{-3}}{4}$, шаг дискретизации 0.1.
14. $W(p) = \frac{3+z^{-1}+2z^{-3}}{6}$, шаг дискретизации 0.05.
15. $W(p) = \frac{1+z^{-1}+2z^{-2}}{4}$, шаг дискретизации 0.03.

Приложение 3. Варианты синусоиды

1. Амплитуда 1, частота 1 Гц.
2. Амплитуда 2, частота 2 Гц.
3. Амплитуда 6, частота 3 Гц.
4. Амплитуда 3, частота 1.5 Гц.
5. Амплитуда 7, частота 0.5 Гц.
6. Амплитуда 2, частота 4 Гц.
7. Амплитуда 3, частота 6 Гц.
8. Амплитуда 1, частота 8 Гц.
9. Амплитуда 1, частота 2.5 Гц.
10. Амплитуда 3, частота 3.5 Гц.
11. Амплитуда 5, частота 4.5 Гц.
12. Амплитуда 4, частота 3.0 Гц.
13. Амплитуда 2, частота 2.0 Гц.
14. Амплитуда 1, частота 5.5 Гц.
15. Амплитуда 3, частота 2.5 Гц.

Литература

1. Анализ временных рядов. Прогноз и управление пер. с англ. Бокс Дж., Дженкинс Г. М.: Мир 1974 1 408 с. временные ряды Каталог_18_02_20 Нет 1
2. Прикладной анализ случайных данных Бендат Д. С., Пирсол А. Дж. М.: Мир 1989 1 540 с. анализ нестационарных процессов Каталог_18_02_20 Нет 1
3. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1-2 Дженкинс Г., Ваттс Д. М.: Мир 1971 1 316 с. спектральный анализ Каталог_18_02_20 Нет 1
4. Цифровые фильтры: анализ и проектирование Антонию А. М.: Радио и связь 1983 1 320 с. фильтры цифровые Техника электромагнитных колебаний Каталог_18_02_20 Нет 1
5. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа учеб. пособие для студ. вузов Романовский П. И. Москва: Наука 1980 Изд. 6-е, стер. 1 336 с. аналитические функции Нет 2
6. Z-преобразование учеб. пособие Поляков В. Н. Волгоград: ВолгГТУ 2016 0 32 с. Z-преобразования Нет 2